

Деменков Н.П.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПРОЦЕССАМИ»**

Для решения задач оптимального управления детерминированными процессами на кафедре «Системы автоматического управления» МГТУ им.Н.Э.Баумана разработан программный комплекс «Методы оптимизации» (рис.1), в основе которого лежит использование пакета Matlab [1].

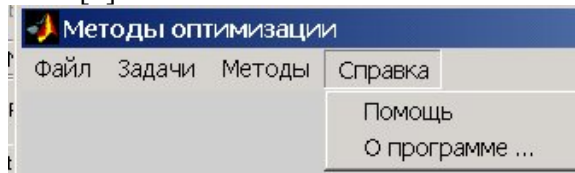


Рис.1. Программный комплекс «Методы оптимизации»

Комплекс «Методы оптимизации» предназначен для нахождения оптимального управления с помощью методов косвенных методов оптимизации [2]: классического вариационного исчисления, принципа максимума и динамического программирования для решения различных задач (рис.2).

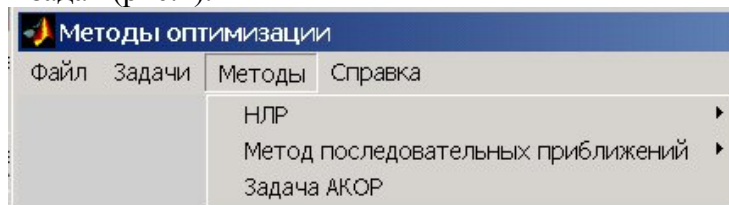


Рис.2. Методы оптимизации

Решаются задачи оптимизации для различных объектов (рис.3).

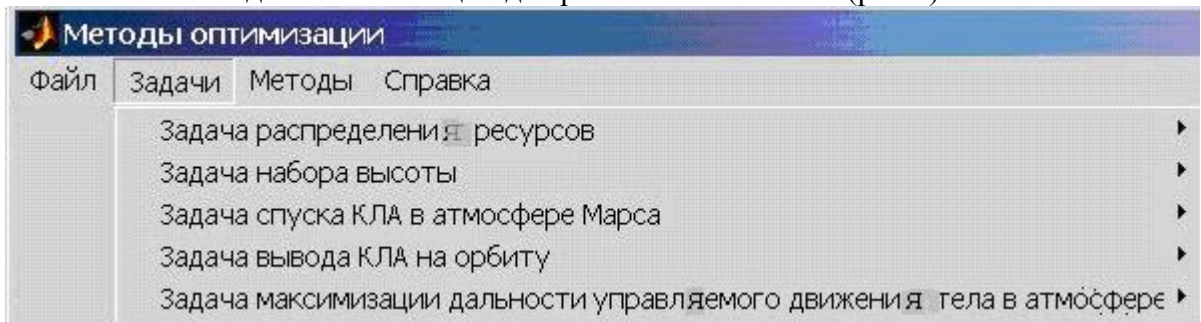


Рис.3. Задачи оптимизации

Имеется справочная информация по методам и задачам, облегчающая работу с программным комплексом (рис.4).

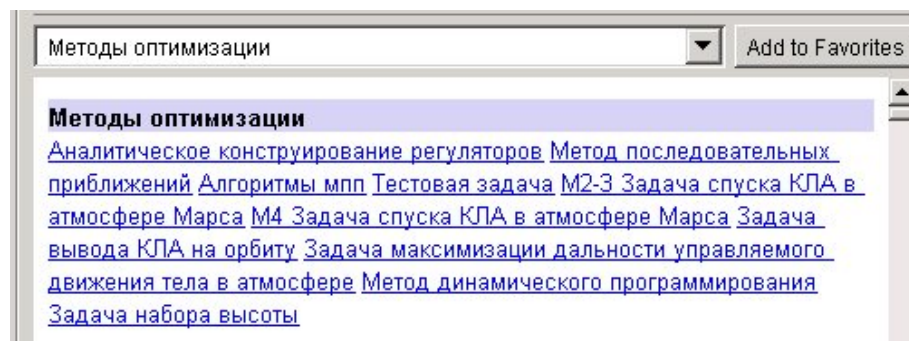


Рис.4. Содержание справки

Комплекс является открытым для внесения в него различных методов и задач [10].

1. Система управления скоростью дисковых ножиц

Дисковые ножницы должны нарезать материал строго определенной длины [2]. В связи с тем, что скорость подачи материала в процессе управления несколько изменяется, она измеряется совместно со скоростью вращающихся фрез. Эти сигналы используются в действующей модели для поддержания длины нарезаемого материала в допустимых пределах.

Решается частная задача - переход от одного разрезанного куска к другому путем изменения скорости вращающейся фрезы. Чтобы избежать брака материала, подводимого к ножницам, изменение скорости должно быть плавным. Однако оно должно быть и быстрым, чтобы уменьшить количество производимого за один проход материала нежелательной длины, так как подобный материал составляет отходы производства.

Желаемое изменение скорости фрезы в функции времени

$$y_1^{*k}(t) = 0,5[1 + \cos \pi t / 10].$$

Для простоты начальное значение скорости нормализуется и равно единице, а начало перехода соответствует нулю.

Уравнения объекта управления имеют вид

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x} + B \bar{u},$$

$$\bar{y} = C \bar{x}.$$

Диапазон начальных условий для объекта управления является ограниченным.

Целью построения служит линейный регулятор, стремящийся, чтобы $y_1(t)$ воспроизводил $y_1^{*k}(t)$ с нулевой ошибкой при ограничениях типа зоны насыщения

$$|u_2(t)| \leq u_{2\max}(t) \text{ и } |y_2(t)| \leq y_{2\max}(t).$$

Реакция системы при единичном начальном условии должна быть «задемпфированной» - перерегулирование не должно превышать пяти процентов.

В качестве показателя качества используется квадратичный критерий, то есть решается задача аналитического конструирования регуляторов (АКОР) [3]

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} (\bar{x}^{*k} - \bar{x})^T Q (\bar{x}^{*k} - \bar{x}) + \bar{u}^T R \bar{u} dt,$$

где $\bar{x}^{*k}(t)$ - желаемое поведение системы.

С целью определения весовых коэффициентов показателя качества время t_k полагается равным бесконечности.

По уравнениям объекта определяется передаточная функция замкнутой системы $W(s)$.

Так как проектируемая система должна иметь перерегулирование, не превышающее пяти процентов и нулевую позиционную ошибку, из первой стандартной формы табл.8.5.1 [4] выбираем коэффициент демпфирования.

В соответствии с методикой Эллера, изложенной в [4], исходя из «худших» значений для $\bar{x}(0)$ и $\bar{u}(0)$, получаем решение для определения постоянной времени T и элементов матрицы Q .

После определения этих величин предположение о бесконечном времени t_k отбрасывается и рассчитывается оптимальная система для заданного времени t_k .

Используя программный комплекс «Методы оптимизации» (рис.5) или непосредственно функцию lqr в Matlab, рассчитываются графики, показывающие, отвечает ли синтезированная система поставленным требованиям.

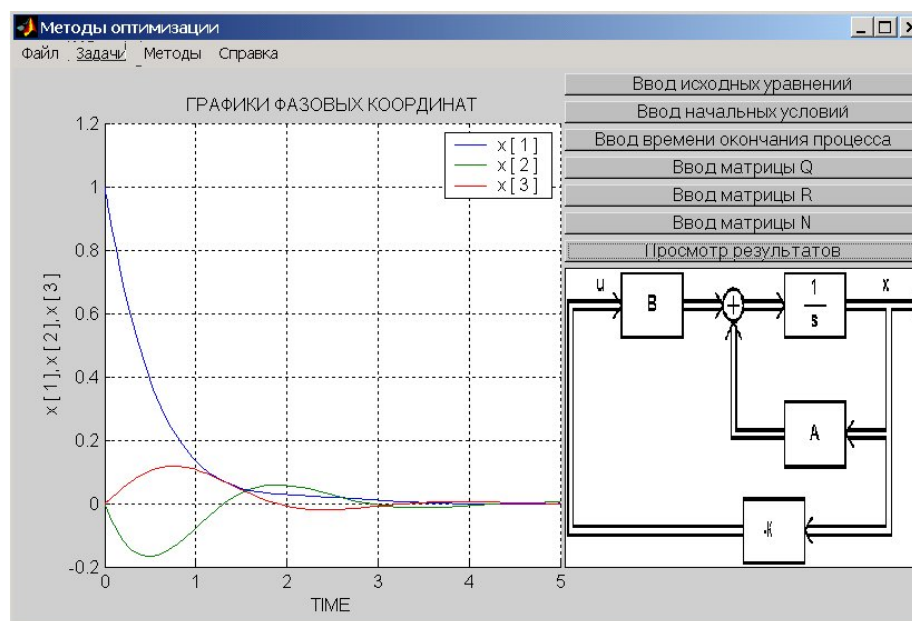


Рис.5. Решение задачи АКОР

В случае невыполнения ограничений на $\bar{y}(t)$ их можно учесть, используя метод штрафных функций или синтезируя нелинейный регулятор, в том числе и нечеткий (НЛР) [5].

2. Задача вывода космического аппарата на орбиту

Рассмотрим задачу, впервые поставленную и решенную Д.Е. Охоцимским и Т.М. Энеевым [2]. В целях упрощения вводятся следующие допущения:

- аэродинамические силы отсутствуют,
- поле земного притяжения является плоскопараллельным, ускорение силы притяжения постоянно для всех высот ($g=const$),
- вращение Земли отсутствует.

Уравнения движения космического аппарата в плоскости выведения $Ox_{ст}Y_{ст}$ (рис.6) могут быть записаны в виде [6]:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{P}{m} \cos \nu,$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{P}{m} \sin \nu,$$

$$\frac{dX}{dt} = V_x,$$

$$\frac{dY}{dt} = V_y.$$

$$P = \dot{m} c,$$

где V_x и V_y – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости V , P – сила тяги, ν – угол между вектором скорости и направлением ускорения a , c – постоянная скорость истечения газов, \dot{m} – секундный расход топлива.

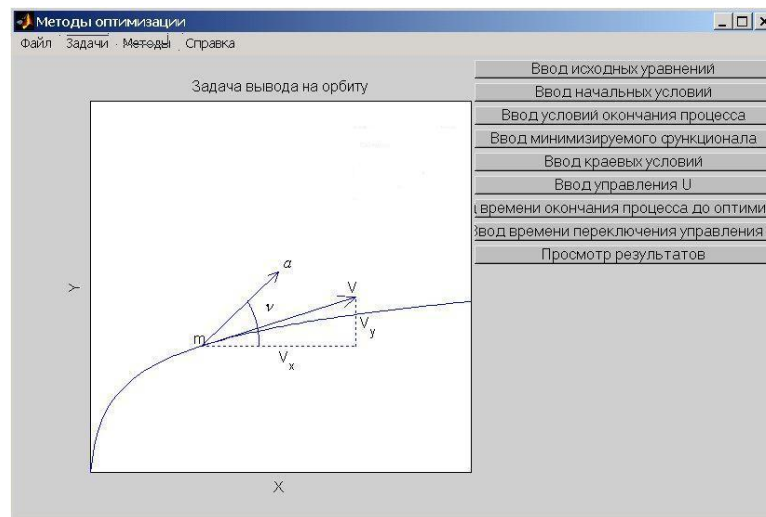


Рис.6. К задаче вывода КА на орбиту

Ставится задача отыскания оптимального секундного расхода топлива $u(t)=\dot{m}$, т.е. необходимо отыскать оптимальную программу изменения вектора тяги $P(t)$ или другими словами такое управление $u(t)$, которое в конце участка выведения $t=t_k$ на заданной высоте $Y(t_k)=Y_{\text{заданное}}$ обеспечит максимум горизонтальной составляющей скорости $V_x(t_k)=V_{x \max}$ при нулевой вертикальной составляющей скорости $V_y(t_k)=0$.

В силу взаимности полученное решение будет обеспечивать также достижение при заданной скорости наибольшей высоты, а также достижение заданных значений высоты и скорости при минимальном расходе топлива.

Область допустимых управлений задается условиями

$$\dot{m}_{\min} \leq \dot{m} \leq \dot{m}_{\max}, \quad \dot{m}_{\min} = 0,$$

$$\cos^2 \nu + \sin^2 \nu = 1.$$

Минимизируемый функционал имеет вид

$$J = -V_x(t_k)$$

Краевые условия:

$$\Phi_1 = V_y(t_k) = 0,$$

$$\Phi_2 = m(t_k) - m_{\text{кон}} = 0.$$

Записав уравнения для сопряженной системы и гамильтониан и, зная, что для сопряженной системы задано единственное условие в конце участка выведения

$$P_1(t_k) = -1,$$

найдите оптимальное управление на участке выведения при следующих начальных условиях (табл.1) и $Y_{\text{заданное}} = 450000$ м.

	1	2	3
МО , кг	150100	32500	2965000
МК , кг	3600	3600	103
М , кг/с	728	148	13270
С , кг/с	3820	5260	3625

Примените для решения задачи метод последовательных приближений [7], взяв в качестве начального приближения для управления закон (рис.5.7):

$$\dot{m} = \begin{cases} \dot{m}_{\max} \dots npu..t \in [t_0, t_{пер}] \\ \dot{m}_{\min} \dots npu..t \in [t_{пер}, t_k] \end{cases}, \text{ где } t_{пер} = 200\text{с.}$$

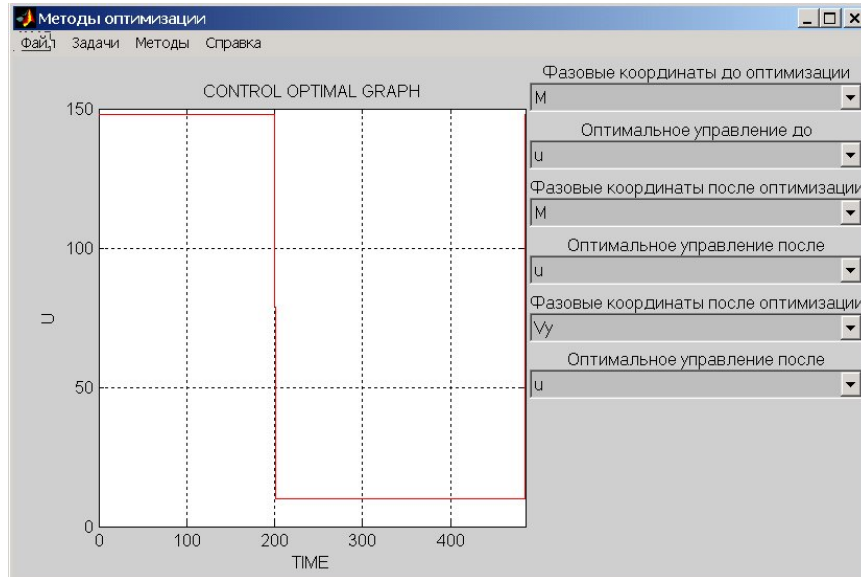


Рис.7. Вид оптимального управления

Сравните результаты, полученные модифицированными алгоритмами улучшения сходимости М2-3 и М4 [8].

3. Задача спуска космического аппарата в атмосфере Марса

В качестве исходных возьмем уравнения продольного движения центра масс спускаемого аппарата в атмосфере без учета вращения планеты [2]:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \sigma_x \rho V K \cos \gamma - \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{R_M + H} \right) \cos \theta,$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} \sigma_x \rho V^2 - g \sin \theta,$$

$$\frac{dH}{dt} = V \sin \theta.$$

где θ - угол наклона траектории, V - скорость полета, H - высота полета, $\rho = \rho_0 e^{-\beta H}$ - плотность атмосферы, ρ_0 - плотность атмосферы у поверхности Марса, β - градиент плотности, $\sigma_x = \frac{c_x S}{m}$ - баллистический параметр, $K = \frac{c_x}{c_y}$ - аэродинамическое качество

спускаемого аппарата, $u = K \cos \gamma$ - управление (эффективное аэродинамическое качество), $g = g_0 \left(\frac{R_M}{R_M + H} \right)^2$ - ускорение свободного падения, g_0 - ускорение свободного падения на поверхности планеты, R_M - радиус Марса.

Основная задача при спуске космического аппарата с пролетной траектории - обеспечить минимум энергозатрат на аэродинамическое торможение спускаемого аппарата, поэтому критерием оптимизации в данном случае является минимум скорости V в конечный момент времени t_k [9].

При заданных в момент $t=t_0$ значениях $\theta_0=\theta(t_0), V_0=V(t_0), H_0=H(t_0)$, а также при известных величинах $\rho_0, \beta, \sigma_x, g_0, R_m$ требуется найти такое $u(t)$, которое обеспечило бы достижение минимальной скорости - V_k на заданной высоте при соблюдении ограничения $|u(t)| \leq u_0$ (рис.8).

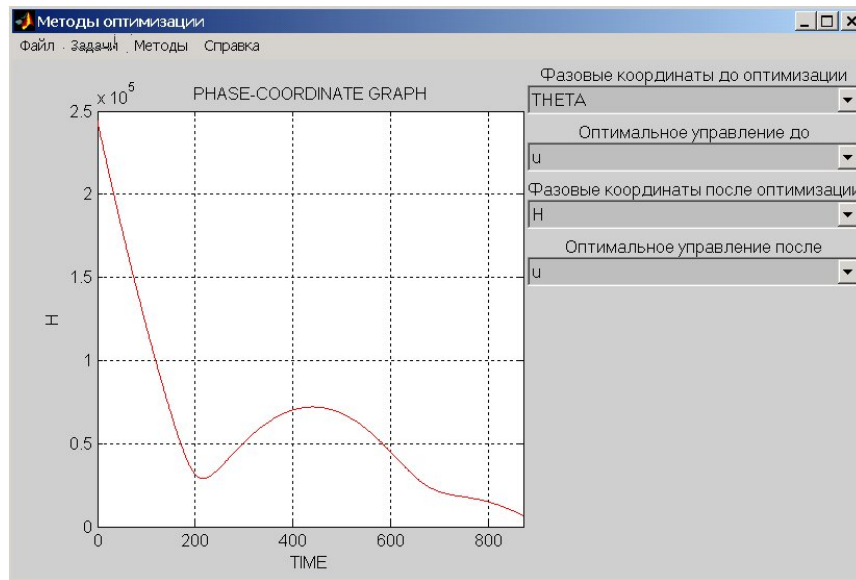


Рис.8. К задаче спуска в атмосфере Марса

Условие окончания процесса:

Спускаемый аппарат должен спуститься до высоты $H_{\text{заданное}}=6600$ метров. Краевые условия в данном случае отсутствуют.

Минимизируемый функционал:

$$J = V.$$

Численное интегрирование уравнений движения СА при различных релейных управлениях и одинаковых начальных условиях и параметрах позволило сделать вывод о том, что наиболее вероятным оптимальным управлением является релейное с одним переключением:

$$u = \begin{cases} -1, & \text{при } t < t_{\text{пер}} \\ +1, & \text{при } t > t_{\text{пер}} \end{cases}.$$

Оптимальность релейного управления с одним переключением была доказана для $H_{\text{заданное}} = 10$ км.

Примените для решения задачи метод последовательных приближений [7]. Сравните результаты, полученные модифицированными алгоритмами улучшения сходимости М4 и М6 [8]. В качестве начальных условий возьмите: $\theta_0 = -0,3$ рад, $H_0 = 244000$ м, $V_0 = 4575$ м/с, $\sigma_x = 1/150$; $K = 0,5$, модель атмосферы -рабочая $\rho_0 = 0,013$ кг/м³; $\beta = 0,00009$ м⁻¹, $H_{\text{заданное}} = 0$ м, $t_{\text{пер}}=198$ с.

4. Задача максимизации дальности полета

Исследуется управляемое движение тела переменной массы в атмосфере Земли под действием сил тяжести, аэродинамических сил и управляемой тяги [2]. В рассматриваемой модели тело трактуется как точечная масса, угол атаки и скольжения - как управляющие функции.

Уравнения движения в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -qV^2 C_x - \sin \theta + P/M_u(1 - \alpha^2/2)(1 - \beta^2/2), \\ \dot{\theta} &= qVC_y - \cos \theta/V + P\alpha/(M_u V), \\ \dot{\varphi} &= -(qVC_z + P\beta(1 - \alpha^2/2)/(M_u V))/\cos \theta, \\ \dot{X} &= kV \cos \theta \cos \varphi, \\ \dot{Y} &= kV \sin \theta, \\ \dot{Z} &= -kV \cos \theta \sin \varphi, \end{aligned}$$

где

$$q = (\rho_0 \alpha^2 S / 2 m_0 g) H_i(Y) / M_u(Y) = 0.92 H_i(Y) / M_u(Y),$$

$$k = \alpha^2 / g * 10 = 9,174,$$

$$M_u = m(t) / m_0, \quad m_0 - \text{начальная масса тела},$$

$$P = P(t) / m_0 g, \quad X_i = \rho(Y) / \rho_0,$$

$$\rho_0 = 1.29 \text{ кг/см}^3 - \text{плотность атмосферы у поверхности Земли.}$$

Система координат (X, Y, Z) ориентирована следующим образом (рис.9): ось Y направлена вертикально вверх, плоскость (X, Z) совпадает с поверхностью Земли. Земля рассматривается плоской и невращающейся. Начало координат системы (X, Y, Z) неподвижно и находится на поверхности Земли. Далее, $\rho = \rho(Y)$ -плотность атмосферы (взята по таблицам стандартной атмосферы), V - величина скорости тела; S - площадь миделева сечения; C_x, C_y, C_z - аэродинамические коэффициенты; θ - угол между вектором скорости и плоскостью (X, Z) (поверхностью Земли); φ - угол между проекцией вектора скорости на плоскость (X, Z) и осью X , a - скорость звука в атмосфере, будем считать независимой от высоты Y и равной 300 м/с.

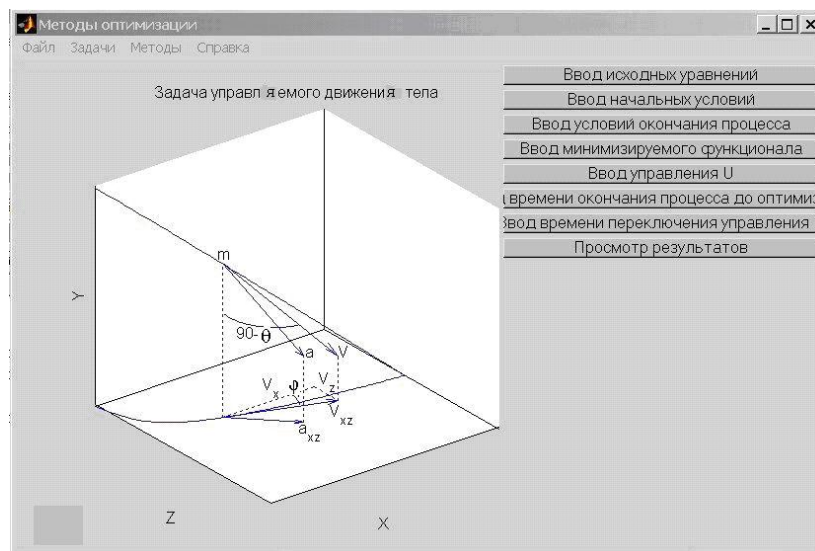


Рис.9. К задаче управляемого движения тела в атмосфере

Величина аэродинамических коэффициентов задается следующими выражениями:

$$C_y = \alpha(a_0(M) + \alpha F(\alpha, M) a_1(M))$$

$$C_z = \beta(d_0(M) + \beta F(\beta, M) d_1(M))$$

$$C_x = C_{x0}(M) + K(t) C_{xd}(M) + \Delta C_x(M, Y) + (b_0(M) - \alpha b_1(M)) (C_y^2 + C_z^2);$$

Здесь $M = V/a$ -число Маха;

$$F(\alpha, M) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } M < 1, \\ 1, & \text{если } M \geq 1. \end{cases}$$

Функции $a_0(M)$, $a_1(M)$, $d_0(M)$, $d_1(M)$, $C_{x0}(M)$, $C_{xd}(M)$, $\Delta C_x(M,y)$, $b_0(M)$, $b_1(M)$ -положительны и заданы арифметическими выражениями; $K(t)$ - заданная положительная функция времени.

Начальные условия:

$$V(0) = V_0, \theta(0) = \theta_0, \varphi(0) = 0, \\ X(0) = X_0, Y(0) = Y_0, Z(0) = 0,$$

т.е. в начальный момент времени скорость направлена параллельно поверхности Земли, ось X выбрана в направлении вектора скорости в момент $t = 0$.

На управляющие функции α и β наложены ограничения:

$$[\alpha] \leq \alpha_{\max}, [\beta] \leq \beta_{\max}, \\ \alpha_{\max} = \beta_{\max} = 18 \text{ градусов} \approx 0,314 \text{ радиан.}$$

Постановка задачи:

Определить область $D(Y_0, V_0)$ точек в плоскости (X, Z) , $y = 0$ куда может быть приведена фазовая точка системы для всех возможных начальных условий y_0, V_0 из интервалов $0,5 \leq Y_0 \leq 22$; $0,6 \leq V_0 \leq 2,5$, используя управления $(\alpha(t), \beta(t))$.

Задача сводится к задаче оптимального управления. Действительно, рассмотрим на траекториях системы функционал:

$$J = X(T) \cos \lambda - Z(T) \sin \lambda$$

где момент T определяется из условия $Y(T) = 0$. Функционал J является проекцией вектора $(X(T), Z(T))$ на направление, исходящее из начала координат в плоскости (X, Z) под углом λ к оси X . Максимизируя функционал J и изменяя λ от 0 до π , мы получим границу области $D(Y_0, V_0)$.

Рассмотрим плоскую постановку задачи, т.е.

$$\varphi = 0, Z = 0, \beta = 0.$$

Время окончания процесса $t_k = T$ определяется из условия $Y(t_k) = 0$.

Минимизируемый функционал $J = X(t_k)$.

Решите задачу методом последовательных приближений [7]. Сравните результаты, полученные модифицированными алгоритмами улучшения сходимости М4 и М6 [8], при следующих начальных условиях: $Y_0 = 5,875$ км; $V_0 = 1,075$ км/с; $t_0 = 0$; $X_0 = 0$.

В качестве начального приближения для управления можно принять нуль на всем интервале времени. При этом дальность будет равна $X = 19$ км.

После решения задачи оптимизации получено $X_{\max} = 209$ км.

Траектория на максимальную дальность имеет четыре основных участка:

- 1) набор высоты при работающем двигателе
- 2) полет по баллистической кривой в разряженных слоях атмосферы
- 3) стабилизация высоты полета после входа в плотные слои
- 4) планирование при максимальном угле атаки $\alpha = 0,314$ после снижения скорости.

5. Задача набора высоты

Самолет летит со скоростью V_0 на высоте h_0 . Нужно изменить его скорость до V_1 и высоту до h_1 так, чтобы расход горючего на это изменение был минимальным [2].

Эта задача легко решается методом динамического программирования. Для того, чтобы представить рассматриваемый процесс как многошаговый, введем следующий способ описания состояний самолета. Процесс изменения V и h будем изображать на плоскости (V, h) . Произведем дискретизацию переменных, разбив диапазоны изменения V и h на необходимые интервалы. При этом дискретные состояния объекта управления будут представляться узлами сетки. Считая, что в каждом узле сетки возможно применение только двух управлений: $U_i = 0$ - изменение скорости V ; $U_i = 1$ -

изменение только высоты h , множество допустимых управлений будет множеством $U=\{0,1\}$.

Для того, чтобы оценить траекторию, нужно знать расход топлива на каждом шаге - целевую функцию $L(x,u)$, значения которой зададим в виде условных чисел на каждом переходе (рис.10).

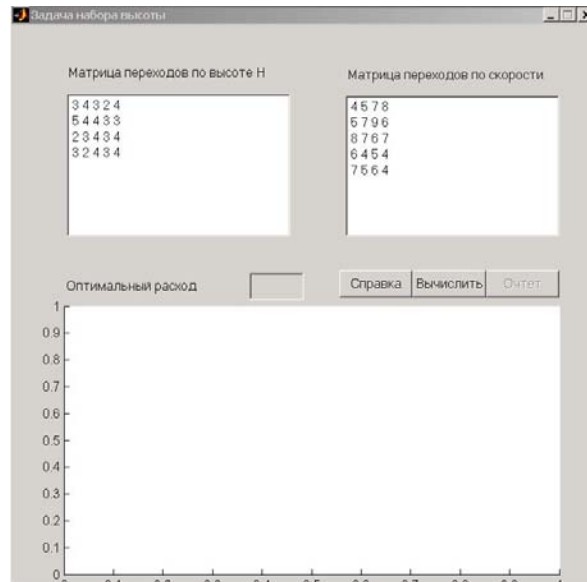


Рис.10. К задаче набора самолетом высоты

Дискретные значения V отметим числами, начиная с конечного значения. Так же поступим в отношении h . Тогда x_{ij} будет означать состояние при $V=i$ и $h=j$, из которого до конца процесса остается сделать $i+j$ шагов.

Двигаясь последовательно от конечной точки к начальной, фиксируем в узлах оптимальные для каждого промежуточного состояния затраты. После того, как значения $J_n^*(x)$ и u^* определены для всех узлов сетки, находим оптимальную траекторию перемещения самолета.

6. Задача распределения ресурсов

В распоряжении инвестора имеется какой-то запас средств (ресурсов) P , который должен быть распределён между K предприятиями $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ [2]. Каждое из предприятий Π_i при включении в него каких-то средств X приносит доход, зависящий от X , т.е. представляющий собой какую-то неубывающую функцию $L_i(X)$. Все функции $L_i(X)$ ($i=1,2,\dots,k$) заданы (рис.11).

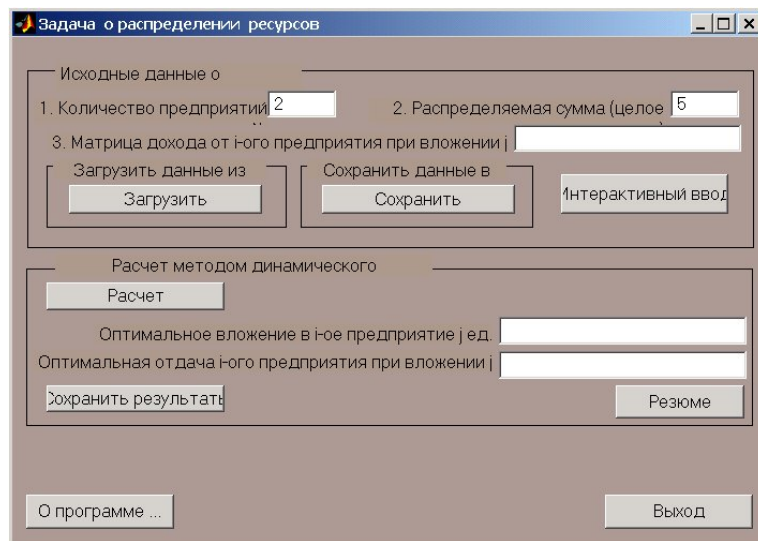


Рис.11. К задаче распределения ресурсов

Спрашивается, как нужно распределить средства P между предприятиями, чтобы в сумме они дали максимальный доход?

Эта задача легко решается методом динамического программирования. Хотя в своей постановке она не содержит упоминания о времени, можно все же операцию распределения средств мысленно развернуть в какой-то последовательности, считая за первый шаг вложение средств в предприятие Π_1 , за второй Π_2 , и т.д.

Объект управления в данном случае - средства или ресурсы, которые распределяются. Состояние объекта перед каждым шагом характеризуется одним числом S - наличным запасом еще не вложенных средств. В этой задаче «шаговыми управлениями» являются средства X_1, X_2, \dots, X_k , выделяемые предприятиям. Требуется найти оптимальное управление, т.е. такую совокупность чисел X_1, X_2, \dots, X_k , при которой суммарный доход максимален:

$$J = \sum_{i=1}^k L_i(X_i) \Rightarrow \max$$

Найдём для каждого i -го шага условный оптимальный выигрыш $J_i(S)$ (от этого шага и до конца), если мы подошли к данному шагу с запасом средств S . Соответствующее ему условное оптимальное управление $X_i(S)$ есть средства, вкладываемые в i -е предприятие.

Начнём оптимизацию с последнего, k -го шага. Если мы подошли к этому шагу с остатком средств S , то очевидно, что мы должны вложить всю сумму S целиком в предприятие Π_k . Поэтому условное оптимальное управление на k -ом шаге: отдать последнему предприятию все имеющиеся средства S , т.е. $X_k(S) = S$, а условный оптимальный выигрыш $J_k(S) = L_k(S)$.

Задаваясь целой гаммой значений S (располагая их достаточно тесно), мы для каждого значения S будем знать $X_k(S)$ и $J_k(S)$. Последний шаг оптимизирован.

Перейдем к предпоследнему, $(k-1)$ -му шагу. Пусть мы подошли к нему с некоторым запасом средств S . Обозначим $J_{k-1}(S)$ условный оптимальный выигрыш на двух последних шагах: $(k-1)$ -м и k -м (который уже оптимизирован).

Если мы выделим на $(k-1)$ -м шаге $(k-1)$ -му предприятию средства X , то на последний шаг останется $(S-X)$. Наш выигрыш на двух последних шагах будет равен:

$$L_{k-1}(X) + J_k(S-X),$$

и нужно найти такое X , при котором этот выигрыш максимален:

$$J_{k-1}(S) = \max_{x \leq S} \{L_{k-1}(X) + J_k(S-X)\}$$

Знак $\max_{x \leq S}$ означает, что берется максимальное значение по всем X , какие только возможны (вложить больше, чем S , мы не можем), от выражения, стоящего в фигурных скобках. Этот максимум и есть условный оптимальный выигрыш за два последних шага, а то значение X , при котором этот максимум достигается, - условное оптимальное управление на $(k-1)$ шаге.

Далее оптимизируем $(k-2)$ -й, $(k-3)$ -й и т.д. шаги. Для любого i -го шага будем находить условный оптимальный выигрыш за все шаги с этого и до конца по формуле:

$$J_i(S) = \max_{x \leq S} \{L_i(X) + J_{i+1}(S-X)\}$$

и соответствующее ему условное оптимальное управление $X_i(S)$ - то значение X , при котором этот максимум достигается.

Дойдя до первого предприятия Π_1 , нам не нужно будет варьировать значение S_i , так как мы точно знаем, что запас средств перед первым шагом равен P :

$$J^* = J_1(P) = \max_{x \leq P} \{L_1(X) + L_2(P-X)\}$$

Итак, максимальный выигрыш (доход) от всех предприятий найден. Теперь остается только «прочитать рекомендации». То значение X , при котором достигается максимум последнего выражения, и есть оптимальное управление X_1^* на 1-ом шаге.

После того, как мы вложим эти средства в первое предприятие, у нас их останется $P - X_1^*$.

«Читая» рекомендацию для этого значения S , выделяем второму предприятию оптимальное количество средств: $X_2^* = X_2(P - X_1^*)$, и т.д. до конца.

Задаваясь различными исходными данными по имеющимся ресурсам и предприятиями, решите задачу распределения ресурсов.

7. Задача трассировки

Требуется определить траекторию, связывающую точки (X_0, Y_0) и (X_k, Y_k) и минимизирующую затраты J при наличии ограничений (например, на условия прокладки жгута между элементами на плате при изготовлении печатных плат, прокладки кабельных систем на предприятии или на условия передвижения транспорта по холмистой местности и т.п.) [2].

Для решения задачи методом динамического программирования плоскость (X, Y) разбивается на дискретные участки и проводится дискретизация переменных путем разбиения диапазонов изменения X и Y на интервалы. При этом дискретные состояния объекта управления будут представляться узлами сетки. Будем считать, что в каждом узле возможно применение лишь двух управлений: $U=0$, когда изменяется лишь координата X , и $U=1$, когда изменяется координата Y . Таким образом, множеством допустимых управлений будет множество $U = \{0, 1\}$.

Для того, чтобы оценить оптимальный маршрут прокладки жгута, то есть его траекторию, нужно знать расходы на прокладку жгута на каждом шаге. Это и будет целевой функцией $L(X, U)$, значения которой зададим в виде условных чисел на каждом переходе. Затраты на прокладку жгута проводов в пределах каждого конкретного участка покажем между узлами.

Для того, чтобы представить рассматриваемый процесс как многошаговый, введем подходящий способ описания состояний объекта. Дискретные значения X отметим числами, начиная с конечного значения. Так же поступим в отношении Y . Тогда x_{ij}

будет означать состояние при $X=i$ и $Y=j$, из которого до конца процесса остается сделать $i+j$ шагов.

Обозначим через X_n множество состояний, из которых процесс заканчивается за n шагов. В это множество войдут все те x_{ij} , для которых $i+j=n$. Полагая $n=0,1,2,\dots$, получим $X_0=x_{00}$; $X_1=\{x_{10}, x_{01}\}$; $X_2=\{x_{20}, x_{11}, x_{02}\}$ и т.д.

Теперь можно приступать к решению задачи. Двигаясь последовательно от конечной точки к начальной и фиксируя в узлах оптимальные для каждого промежуточного состояния затраты, найдём оптимальный маршрут прокладки жгута.

Литература

1. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System Toolbox. MATLAB 5 для студентов / Под общей ред. В.Г.Потемкина. –М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. -287с.
2. Деменков Н.П. Вычислительные аспекты решения задач оптимального управления: Учеб. Пособие. М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2007. 171с.
- 3.Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1968. - 368с.
4. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. Пер. с англ. М.: Наука, 1970. -620с.
5. Деменков Н.П. Нечеткое управление в технических системах: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2005. 200с.
6. Брайсон А., Хо Ю Ши Прикладная теория оптимального управления, М.: Мир, 1972. –544с.
7. Крылов И.А., Черноушко Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления / ЖВМ и МФ, 1962, т.2, №6. С.1132-1139.
8. Любушин А.А. О применении метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления / ЖВМ и МФ, 1982, т.22, №1. С.79-89.
9. Деменков Н.П., Зотов В.Е., Крутов А.В. Алгоритмы управления полетом и посадкой на Марс космического летательного аппарата / Труды МВТУ №297. М.: Изд-во МВТУ им.Н.Э.Баумана. 1979. С.35-43.
10. Сборник лабораторных работ по курсу «Управление в технических системах»: Метод. Указания к лабораторным работам / Под ред. К.А.Пупкова. М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2002. -72с.