Московский государственный технический университет
им.Н.Э.Баумана

Деменков Н.П.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПРОЦЕССАМИ»

Кафедра «Системы автоматического управления»

Домашнее задание по дисциплине
«ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПРОЦЕССАМИ»
для студентов специальности 22.01 каф.ИУ-1

Задача 1. Найти оптимальную по быстродействию и расходу топлива тягу двигателя $P(t)$ при посадке КА постоянной массы m на поверхность планеты, лишенной атмосферы, в функции от высоты h и вертикальной скорости $\dot{h}$. КА находится на высоте $h=x_1(t)$ и движется с вертикальной скоростью $\dot{h}=x_2(t)$.

Уравнения движения КА имеют вид:

$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$,

$\dot{x}_2(t)= P(t)/m - g$, где $|P(t)| \le P_{max}$.

Количество потребляемого топлива определяется соотношением

$$Q=\int_{t_0}^{t_k} |P(t)|dt.$$

Здесь g=const – ускорение планеты, $P_{max} \ge mg$, t_k не задано.

Исходные данные для выполнения ДЗ берутся из таблицы. Расчеты проводятся для нечетных вариантов с использованием принципа максимума при спуске на Марс, для четных - с использованием классического вариационного исчисления при спуске на Луну.

Существуют ли начальные значения положения и скорости КА, которые приводят к аварии?

Сколько существует решений, оптимальных по расходу топлива?

Какова область начальных состояний КА, для которой оптимальное по расходу топлива решение является единственным.

п.№	x_{10}, м	x_{20}, м/мс	x_{1k}, м	x_{2k}, м/с	m, кг
1	6000	-200	30	-3,0	5000
2	5900	-205	32	-3,2	4800
3	5800	-210	34	-3,4	4600
4	5700	-215	36	-3,6	4400
5	5600	-220	38	-3,8	4200
6	5400	-225	40	-4,0	4000
7	5200	-230	42	-4,2	3800
8	5100	-235	44	-4,4	3600
9	5000	-240	46	-4,6	3400
10	4900	-245	48	-4,8	3200
11	4800	-250	50	-5,0	3000
12	4700	-255	52	-5,2	2800
13	4600	-260	54	-5,4	2600
14	4500	-265	56	-5,6	2400
15	4400	-270	58	-5,8	2200
16	4300	-275	60	-6,0	2000
17	4200	-280	62	-6,2	1800
18	4100	-285	64	-6,4	1600
19	4000	-290	66	-6,6	1400
20	3900	-295	68	-6,8	1200
21	3800	-300	70	-7,0	1000

Отчет должен содержать: постановку задачи, метод решения, синтезированный алгоритм оптимального управления, структурную схему замкнутой оптимальной системы посадки на планету, ее фазовый портрет, графики оптимального управления и переходных процессов.

Домашнее задание по дисциплине
«ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПРОЦЕССАМИ»
для студентов специальности 22.01 каф.ИУ-1

Задача 2. Произвести синтез следящей системы, оптимальной по быстродействию, при отработке входного сигнала, изменяющегося по линейному закону $u(t)=a_0+a_1t$.

Объект управления описывается уравнением

$$T\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = Ku$$

где $|u| \le U_{max}$, $x'(t_0)=0$.

Исходные данные для выполнения ДЗ берутся из таблицы.. Расчеты проводятся для нечетных вариантов с использованием принципа максимума, для четных - с использованием классического вариационного исчисления.

При каких условиях можно добиться нулевой ошибки в воспроизведении входного сигнала?

Приведите примеры 3-х технических задач, решаемых в такой постановке задачи оптимизации.

п.№	K	T, с	$x(t_0)$	a_0, с	a_1, c^{-1}	U_{max}
1	0,001	0,6	1,8	0,30	1,0	150
2	0,002	0,5	1,9	0,32	1,2	160
3	0,003	0,4	2,0	0,34	1,4	170
4	0,004	0,3	2,1	0,36	1,6	180
5	0,001	0,6	2,2	0,38	1,8	190
6	0,002	0,5	2,3	0,40	2,0	200
7	0,003	0,4	2,4	0,42	1,2	210
8	0,004	0,3	2,5	0,44	1,4	220
9	0,001	0,6	1,8	0,46	1,6	150
10	0,002	0,5	1,9	0,48	1,8	160
11	0,003	0,4	2,0	0,50	2,0	170
12	0,004	0,3	2,1	0,52	1,2	180
13	0,001	0,6	2,2	0,54	1,4	190
14	0,002	0,5	2,3	0,56	1,6	200
15	0,003	0,4	2,4	0,58	1,8	210
16	0,004	0,3	2,5	0,60	2,0	220
17	0,001	0,6	1,8	0,62	1,2	150
18	0,002	0,5	1,9	0,64	1,4	160
19	0,003	0,4	2,0	0,66	1,6	170
20	0,004	0,3	2,1	0,68	1,8	180
21	0,001	0,6	2,2	0,70	2,0	190

Отчет должен содержать: постановку задачи, метод решения, синтезированный алгоритм оптимального управления, структурную схему замкнутой оптимальной системы, ее фазовый портрет, графики оптимального управления и переходных процессов, а также описание 3-х технических задач, решаемых в такой постановке задачи оптимизации.

Домашнее задание по дисциплине
«ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПРОЦЕССАМИ»
для студентов специальности 22.01 каф.ИУ-1

Задача 3. Синтезировать алгоритм оптимального управления и рассчитать оптимальные процессы для привода с двигателем постоянного тока, имеющим номинальными: число оборотов $n_н$=700 об/мин, $U_н$=220В, $P_н$=1200 Вт, при ограничении его нагрева. Привод описывается следующей системой уравнений:

$$J\frac{d\Omega}{dt}=K_{дв}\,i - M_c,\quad |i| \le i_н,$$

$$\frac{d\alpha}{dt}=\Omega .$$

Требуется перевести координаты объекта из положения при $t=0$ $\alpha_0=0$ рад, $\Omega_0=0$ рад/с в положение при $t=t_k$ $\alpha_{к}=200$ рад, $\Omega_к=0$ рад/с за минимально допустимое время t_k при ограничении на нагрев

$$\int_{t_0}^{t_k} Ri^2dt \le A .$$

Исходные данные для выполнения ДЗ берутся из таблицы. Расчеты проводятся для нечетных вариантов с использованием принципа максимума, для четных - с использованием классического вариационного исчисления.

Меньше какого значения нельзя сделать t_k?

Как влияет ограничение по нагреву на время переходного процесса в оптимальной системе?

п.№	J, кгм^2	$K_{дв}$	M_c, нм	$i_н$, а	A, втс	R, ом
1	0,6	0,16	0,01	7,0	150	4,0
2	0,5	0,15	0,02	6,9	148	3,9
3	0,4	0,14	0,03	6,8	146	3,8
4	0,3	0,13	0,04	6,7	144	3,7
5	0,6	0,12	0,01	6,5	142	3,6
6	0,5	0,11	0,02	6,4	140	3,5
7	0,4	0,10	0,03	6,3	138	3,4
8	0,3	0,11	0,04	6,2	136	3,3
9	0,6	0,12	0,01	6,1	134	3,2
10	0,5	0,13	0,02	6,0	132	3,1
11	0,4	0,14	0,03	6,1	130	3,0
12	0,3	0,15	0,04	6,2	128	2,9
13	0,6	0,16	0,01	6,3	126	2,8
14	0,5	0,15	0,02	6,4	124	2,7
15	0,4	0,14	0,03	6,5	122	2,6
16	0,3	0,13	0,04	6,6	120	2,5
17	0,6	0,11	0,01	6,7	118	2,4
18	0,5	0,12	0,02	6,8	116	2,3
19	0,4	0,11	0,03	6,9	114	2,2
20	0,3	0,10	0,04	7,0	112	2,1
21	0,5	0,16	0,01	7,0	150	2,0

Отчет должен содержать: постановку задачи, метод решения, синтезированный алгоритм оптимального управления, структурную схему замкнутой оптимальной системы, ее фазовый портрет, графики оптимального управления и переходных процессов.

Рекомендуемая литература

1. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.2. Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления / Под общей ред. К.А.Пупкова. Учебник. –М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2000. -736с.

2. Деменков Н.П. Вычислительные аспекты решения задач оптимального управления: Учеб. Пособие. М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2007. - 171с.

3.Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Изд-во Наука, 1968. - 368с.

4.Математическая теория оптимальных процессов / Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко, М: Изд-во Наука, 1983. - 408с.

5. Деменков Н.П. Нечеткое управление в технических системах: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2005. - 200с.

6. Брайсон А., Хо Ю Ши Прикладная теория оптимального управления, М.: Изд-во Мир, 1972. –544с.

7. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Изд-во Наука, 1971. - 424с.

8. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во ИЛ, 1960. -120с.

Пример решения задачи №1

Задание:

Найти оптимальную по расходу топлива тягу двигателя $P(t)$ при посадке КА постоянной массы M на поверхность планеты, лишенной атмосферы, в функции от высоты h и вертикальной скорости $\dot{h}$. КА находится на высоте $h = x_1(t)$ и движется с вертикальной скоростью $\dot{h} = x_2(t)$. Уравнения движения КА имеют вид:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$x_{10} = 6000\ м,\ x_{20} = -200\ м/с,$$

$$x_{1k} = 30\ м,\ x_{2k} = -3\ м/с$$

$$\dot{x}_2(t) = P(t)/M - g,$$

где $P_{min} \le P(t) \le P_{max}$,

Количество потребляемого топлива определяется соотношением:

$$Q = \int_{t_0}^{t_k} |P(t)| dt$$

Здесь $g = const$ - ускорение планеты, $P_{max} \ge Mg$, t_k - не задано.

Расчеты проводятся с использованием классического вариационного исчисления при спуске на Луну.

Существуют ли начальные значения высоты и скорости, которые приводят к аварии?

Сколько существует оптимальных по расходу топлива решений?

Какова область начальных состояний, для которой оптимальное по расходу топлива решение является единственным?

Решение:

Для удобства дальнейшего представления расчетов, перенесем начало координат фазовой плоскости так, чтобы оно совпадало с конечным состоянием системы. При этом получим новые начальные условия:

$$\begin{cases} x_{10} = 5970\ м & x_{1k} = 0 \\ x_{20} = -197\ м/с & x_{2k} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

В роли управления в данной задаче выступает тяга реактивного двигателя посадки:

$$u(t) = P(t)$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначением управления как $u(t)$.

Запишем уравнения состояния системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{u(t)}{M} - g \end{cases} \qquad (2)$$

Для удобства вычислений, будем вести отсчет времени с момента включение реактивных двигателей, тогда $t_0 = 0$.

Минимизируемый функционал:

$$Q = \int_0^{t_k} |u(t)| dt \to min \qquad (3)$$

Составим Гамильтониан H^* :

$$H^* = p^T(Fx + gu) + |u| = p_1 x_2(t) + p_2\left(\frac{u(t)}{M} - g\right) + |u(t)| \qquad (4)$$

Уравнения для сопряженной системы:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H^*}{\partial x_1} \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H^*}{\partial x_2} \end{cases} \qquad (5)$$

$$\dot{p}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1(t) = const = C_1 \qquad (6)$$

$$\dot{p}_2 = p_1 \quad \Rightarrow \quad p_2(t) = p_1 t + C_2 = C_1 t + C_2 \qquad (7)$$

Данная задача является частным случаем, когда критерий качества, уравнения движения и ограничения являются линейными функциями от фазовых координат и управляющих переменных. Согласно [6], в общем случае минимума для подобных задач не существует, если не наложены ограничения типа неравенств на управляющие переменные. Так как в данном случае эти ограничения наложены, то минимизирующее решение, если оно существует, соответствует управлению, которое находится в той или иной точке границы области допустимых управлений. В общем случае происходит одно или несколько переключений управления. Такое управление называется релейным, так как оно мгновенно перескакивает из одной точки границы области допустимых управлений в другую точку этой же границы.

Для минимизации H^* по u , при условии $u_{min} \le u \le u_{max}$ необходимо, чтобы управление имело следующий вид:

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{при} \quad p_2 < 0 \\ u_{min} & \text{при} \quad p_2 > 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Найдем уравнения фазовых траекторий для каждого из возможных управлений.

1) $u = u_{max}$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{u(t)}{M} - g = \frac{u_{max}}{M} - g = const$$

$$x_2(t) = \left(\frac{u_{max}}{M} - g\right)t + x_{20} \qquad (9)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$x_1(t) = \int_0^t x_2(t)dt = \left(\frac{u_{max}}{M} - g\right) \cdot \frac{t^2}{2} + x_{20}t + x_{10} \qquad (10)$$

Выразим время из уравнения (9):

$$t = \frac{x_2 - x_{20}}{\left(\frac{u_{max}}{M} - g\right)} \qquad (11)$$

Подставим (11) в (10) и получим:

$$x_1 = \frac{x_2^2 - x_{20}^2}{2 \cdot \left(\frac{u_{max}}{M} - g\right)} + x_{10} \qquad (12)$$

2) $u = u_{min}$

Проведя аналогичные выкладки, получим выражение для фазовой траектории при таком управлении:

$$x_1 = \frac{x_2^2 - x_{20}^2}{2 \cdot \left(\frac{u_{min}}{M} - g\right)} + x_{10} \qquad (13)$$

Учитывая условия $u_{max} > Mg$, $u_{min} < Mg$ получаем:

$$\left(\frac{u_{max}}{M} - g\right) > 0$$

$$\left(\frac{u_{min}}{M} - g\right) < 0$$

Тогда, обозначив:

$$\left(\frac{u_{max}}{M} - g\right) = \hat{u},$$

получим:

$$\left(\frac{u_{min}}{M} - g\right) = -\hat{u}$$

Фазовые траектории тогда примут вид:

$$x_1 = \frac{x_2^2 - x_{20}^2}{2 \cdot \hat{u}} + x_{10} \qquad (13)$$

$$x_1 = -\frac{x_2^2 - x_{20}^2}{2 \cdot \hat{u}} + x_{10} \qquad (14)$$

Через начало координат проходит только одна фазовая траектория, соответствующая определенным начальным условиям. Найдем уравнение такой траектории и соответствующие ей начальные условия.

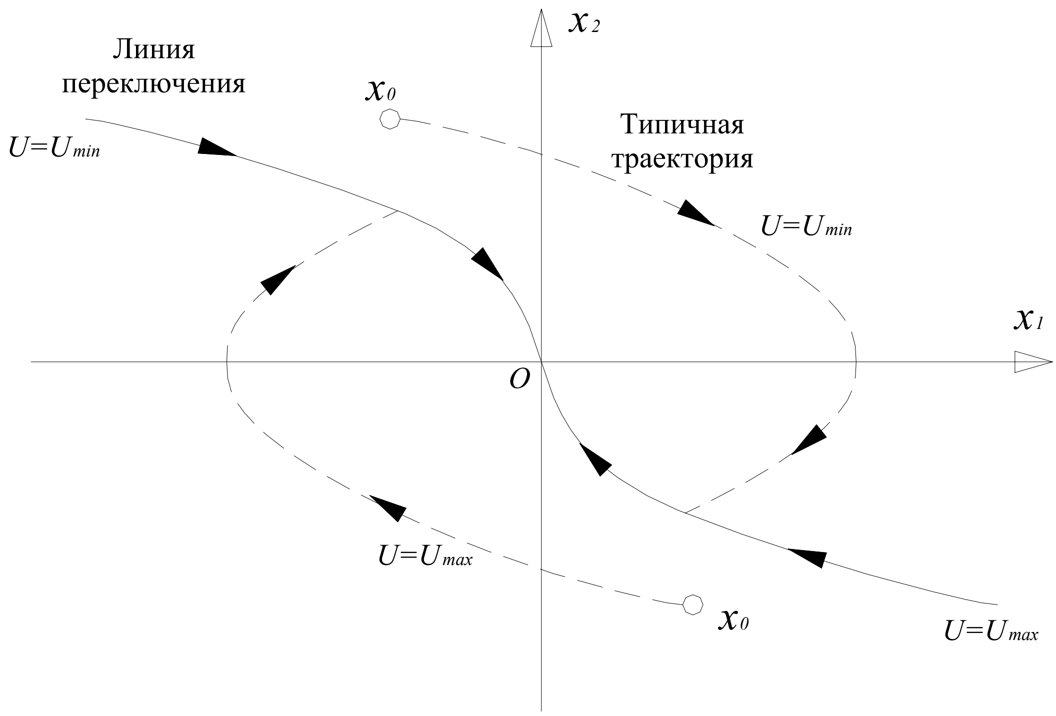
Уравнение этой фазовой траектории:

$$x_1 = \begin{cases} -\dfrac{x_2^2}{2 \cdot \hat{u}} & \text{при} \quad x_2 > 0 \\ \dfrac{x_2^2}{2 \cdot \hat{u}} & \text{при} \quad x_2 < 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Соответствующие ей начальные состояния системы можно найти из условия:

$$\frac{x_{20}^2}{2 \cdot \hat{u}} = x_{10} \qquad (16)$$

Построим фазовый портрет системы:



Таким образом, система сначала использует то управление, которое приведет ее к линии переключения, а потом переключает управление.

Найдем момент переключения. Для этого найдем точку пересечения первоначальной траектории и линии переключения. Будем считать, что начальное состояние систем лежит во втором квадранте, тогда нам необходимо найти точку пересечения парабол, описываемых уравнениями:

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2 \cdot \hat{u}} \qquad (17)$$

$$x_1 = -\frac{x_2^2 - x_{20}^2}{2 \cdot \hat{u}} + x_{10} \qquad (18)$$

Сложим эти два уравнения:

$$2x_1 = \frac{x_{20}^2}{2 \cdot \hat{u}} + x_{10}$$

Зная координату x_1 переключения, найдем время переключения. Из уравнения (10), имеем:

$$x_1(t) = \hat{u} \cdot \frac{t^2}{2} + x_{20}t + x_{10} \qquad (19)$$

$$\frac{x_{20}^2}{4 \cdot \hat{u}} + \frac{x_{10}}{2} = \hat{u} \cdot \frac{t_n^2}{2} + x_{20}t_n + x_{10}$$

$$\hat{u} \cdot t_n^2 + 2x_{20}t_n - \frac{x_{20}^2}{2 \cdot \hat{u}} + x_{10} = 0$$

Откуда, решив квадратное уравнение, получаем:

$$t_n = \frac{-x_{20} \pm \sqrt{\left(\frac{3x_{20}^2}{2} - x_{10}\right)}}{\hat{u}} = \frac{-x_{20} \pm \sqrt{\left(\frac{3x_{20}^2}{2} - x_{10}\right)}}{\left(\frac{u_{max}}{M} - g\right)}$$

Оптимальное управление для начальных условий, лежащих выше линии переключения:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{min} & \text{при} \quad t < t_n \\ u_{max} & \text{при} \quad t \geq t_n \end{cases}$$

К аварии могут привести те начальные значения фазовых координат, которые приведут к тому, что парабола оптимального движения системы выйдет за допустимые пределы фазовых координат. В данном случае важно соблюдать условие, что высота h КА должна быть положительной, то есть условие $x_1 \geq 0$.