Глава VI Натурные испытания

Испытания систем управления есть экспериментальные исследования опытного образца системы и ее компонентов на соответствие техническому заданию. По сути, опытный образец является физической моделью системы, адекватность которой реальному образцу достигается экспериментами различного вида.

Под экспериментом понимается научно поставленный опыт, наблюдение исследуемого явления в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и воссоздавать его каждый раз при повторении этих условий.

Целью эксперимента является:

1. Исследование новых принципов построения систем управления или ее отдельных элементов (новые физические принципы или новые конструкции).
2. Изучение физических явлений (особенностей протекания), процессов в системе и в ее отдельных элементах. Исследование явлений, происходящих при сопряжении отдельных элементов.
3. Идентификация моделей системы управления в целом или ее отдельных элементов.
4. Изучение характеристик окружающей среды, как воздействий на систему.
5. Исследование и оценка тактико-технических характеристик системы управления на соответствие техническому заданию.

Общую схему проведения эксперимента можно представить следующим образом (рис. 49).

Рисунок 49 – Общая схема проведения эксперимента

Из рисунка видно, что эксперимент представляет собой сложную цепь исследований, начиная от цели исследования и кончая документированием информации о его результатах.

Условием перехода от этапа моделирования к натурным испытаниям может служить показатель λ – глубина моделирования, так как это показано на рис. 48.

§ 1. Виды испытаний.

Испытания являются одним из самых сложных и трудоемких этапов разработки систем управления. При проведении испытаний обычно формируется их цель, программа и план. Естественно, для их проведения необходима инструментальная база, включающая различные стенды и создание условий, в достаточной мере адекватных реальным.

Существуют различные виды испытаний:

1. Стендовые, включающие механические испытаний (вибрации, ударные нагрузки и т.п.), климатические, тепловые, испытания на электромагнитный импульс и т.п.

Как правило, испытываются отдельные приборы, блоки системы, но и образцы в совокупности объекта управления и системы управления. Цель таких испытаний – оценка таких показателей как надежность, устойчивость к различным воздействиям, живучесть.

2. Испытания на летающих лабораториях.

На таких испытаниях оцениваются тактико-технические характеристики отдельных компонентов системы управления в условиях, приближенных к реальным и которые нельзя создать в лаборатории. Например, оценить дальность захвата и сопровождения цели радиолокатором головки самонаведения и др.

3. Комплексная наземная отработка.

К этому виду можно отнести натурно-математическое моделирование. Однако при моделировании аппаратура системы размещается на различных стендах, ее размещение отлично от штатного на объекте управления. Это обстоятельство не дает возможности оценить такой фактор как электромагнитная совместимость. Поэтому комплексная наземная отработка предполагает испытания при взаимодействии аппаратуры в ее штатном размещении на объекте.

4. Летно-конструкторские испытания (ЛКИ).

Этот вид испытаний осуществляет разработчик системы управления – главный конструктор. Цель таких испытаний – провести отработку системы управления в реальных условиях и оценить ее на соответствие требованиям технического задания.

Эти испытания проводятся на специально оборудованных базах (полигонах). Инструментальная база, позволяющая получить измерительную информацию, включает в себя аппаратуру внешнетраекторных измерений и телеметрию.

Успех летно-конструкторских испытаний в значительной мере определяется результатами различных видов моделирования и других видов испытаний.

Подготовка изделия к ЛКИ осуществляется коллективом испытателей на технической позиции.

5. Государственные испытания (ГИ).

Эти испытания проводит заказчик. Здесь оценивается соответствие образца техническому заданию в реальных условиях.

ГИ проводятся тогда, когда на ЛКИ достигнуты требования технического задания.

В отличие от ЛКИ здесь не осуществляется доработка системы управления от образца к образцу.

Заметим, что испытания систем – это область в разработке систем управления, включающая научные исследования, проектирование и конструирование, создание инструментальной базы, организацию и проведение испытаний.

В этом учебном пособии мы рассмотрим лишь способы оценки результатов ЛКИ и ГИ.

§ 2. Способ оценки результатов ЛКИ.

Принятые оценки вероятности успешной работы для независимых результатов испытаний от одной реализации к другой, используемые в классическом случае, неприемлемы для оценки результатов испытаний, отрабатываемых (совершенствующихся) в процессе их проведения. Поэтому здесь мы рассмотрим, каким образом следует оценивать их результаты и построить желаемую оценку. В этом случае результаты последующего испытания в серии испытаний зависят от результатов предыдущих.

Иначе говоря, в процессе отработочных испытаний (ЛКИ) осуществляется процесс «обучения» системы управления в конечном итоге выполнить требования технического задания.

Общую схему проведения ЛКИ можно представить так, как это показано на рис. 50.

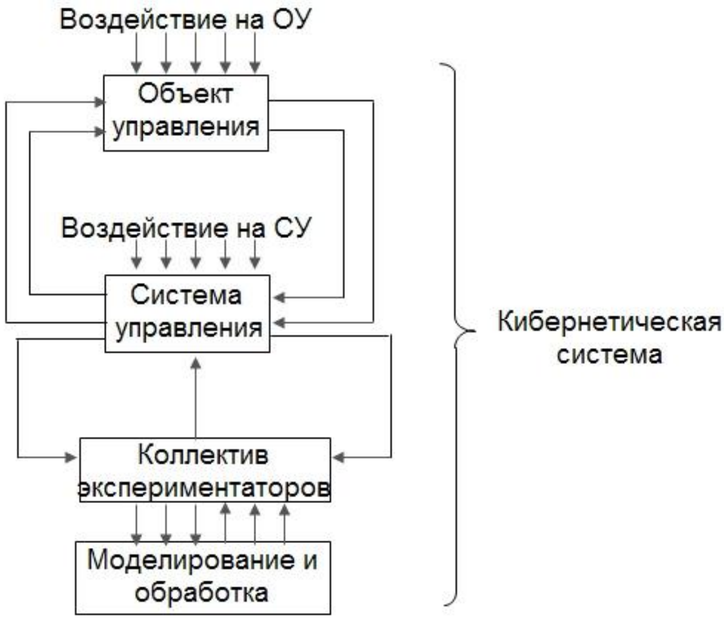

Рисунок 50 – Общая схема проведения ЛКИ

Из рисунка мы видим, что информация о поведении объекта управления и системы управления при различных возмущающих воздействиях поступает с помощью средств внешне траекторных измерений и телеметрии в распоряжение коллектива экспериментаторов. На основании результатов каждого пуска (реализации) осуществляется анализ этих результатов и, в случае необходимости, вырабатываются и реализуются некоторые мероприятия, направленные на совершенствование системы управления.

Иначе, задача состоит в получении оценки для вероятности успешной работы САУ на основе исходов в n опытах при отработке системы в процессе ЛКИ.

Введем случайную величину:

$$\xi_i = \begin{cases} 0 - \text{в } i - \text{м испытании произошло событие } \mathrm{E}_0 - \text{не успех} \\ 1 - \text{в } i - \text{м испытании произошло событие } \mathrm{E}_1 - \text{успех} \end{cases}$$

Последовательность

$$\{\xi_i\} = \{\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N\} \qquad (i = 1, \dots, N)$$

является одной из реализаций случайного процесса.

От простейшей статистики $\{\xi_i\}$ перейдем к случайной величине

$$K_i = \sum_{j=1}^{i} \xi_j,$$

которая представляет собой текущее число успешных испытаний в i испытаниях.

Графически это можно представить следующим образом

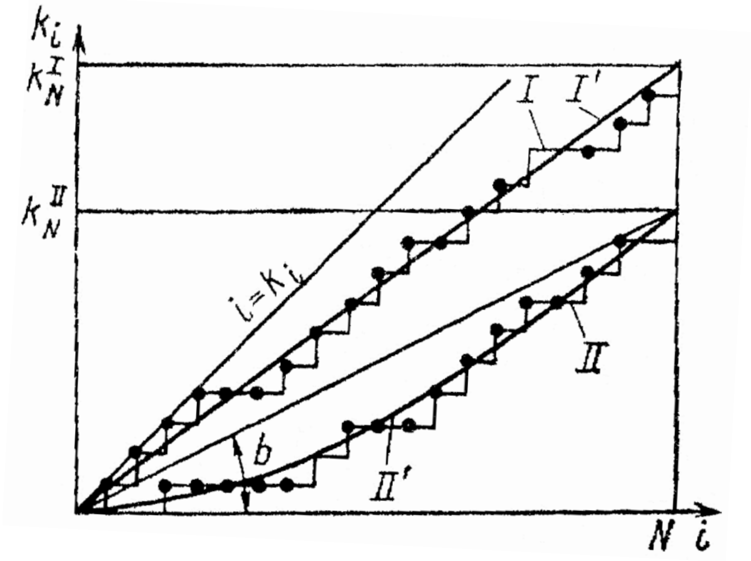

Рисунок 51 – План испытаний

где: K_i – число успешных испытаний, а i- номер испытания.

Если в N испытаниях в зависимости от исхода каждого предыдущего испытания последующий образец не дорабатывается, то мы имеем независимые опыты и тогда оценка вероятности успешной работы будет равна

$$\mathrm{P}_N^*(\mathrm{E}_1) = \frac{K_N}{N} \quad \text{и при } N \to \infty$$

$$\mathrm{P}_N^*(\mathrm{E}_1) \to \mathrm{P}(\mathrm{E}_1) \quad \text{(по закону больших чисел).}$$

Иначе, ожидаемое число успешных испытаний к i-му испытанию будет равно:

$$K_i^* = f(i) = \mathrm{P}_N^*(\mathrm{E}_1)i \quad \text{или}$$

$$f(i) = \frac{K_N}{N} i\,.$$

Наилучшей аппроксимацией для $f(i)$ в этом случае будет прямая, производная от которой есть вероятность успешной работы

$$\frac{df(i)}{di} = \frac{K_N}{N} = \mathrm{P}_N^*(\mathrm{E}_1) \, .$$

Теперь пусть испытания являются зависимыми, т.е. каждый последующий опыт производится с учетом результатов предыдущего. Тогда траектория $f(i)$ будет в общем случае нелинейной функцией.

Исходя из физических соображений, $f(i)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. $i = 0, \quad K_i = 0; \quad 0\left(\frac{dK_i}{di}\right)_{i=0} < 1.$
2. $0 \leq \left(\frac{dK_i}{di}\right)_{i=0} \leq \left(\frac{dK_i}{di}\right)_{i=1} \leq \cdots \leq \left(\frac{dK_i}{di}\right)_{i=N} < 1.$
3. $\lim_{i\to\infty} K_i = bi - c;$ где $b = P_\infty = \left(\frac{dK_i}{di}\right)_{i=\infty}.$

Можно указать простой класс непрерывных функций, обладающих указанными свойствами, а именно:

$$K_i = bi - cA(i),$$

где A, b и $c -$ коэффициенты, характеризующие конкретную траекторию. Причем должны быть выполнены следующие предельные соотношения:

$$\lim_{i\to\infty} A(i) = 1; \; \lim_{i\to 0} A(i) = 0.$$

Со всех точек зрения подходящей для $A(i)$ является функция

$$A(i) = 1 - \ell^{-i/a},$$

а аппроксимирующая траектория тогда будет:

$$K_i^* = bi - c\left(1 - \ell^{-i/a}\right).$$

Текущая оценка вероятности успешной работы системы будет

$$\left(\frac{dK_i}{di}\right)_{i=N} = P_i^*(\mathrm{E}_1) = b - \frac{c}{a}\ell^{-i/a} \quad ,$$

а к концу испытаний она будет равна

$$\left(\frac{dK_i}{di}\right)_{i=N} = P_N^*(\text{E}_1) = b - \frac{c}{a}\ell^{-N/a} \quad .$$

Для того чтобы вычислить оценку $P_N^*(\text{E}_1)$, надо определить коэффициенты a, b и c.

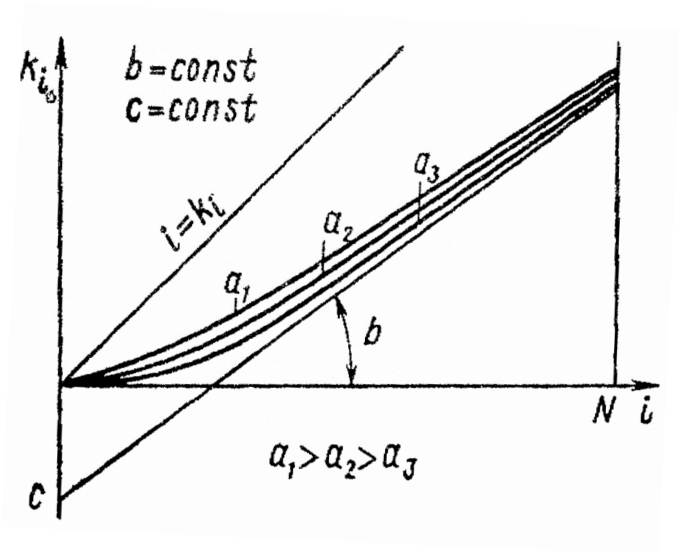

Рисунок 52 – Аппроксимации плана испытаний

Эти коэффициенты можно определить, если минимизировать следующий квадратичный функционал:

$$Q = \sum_{i=1}^{N}\left[K_i^* - bi + c(1 - \ell^{-i/a})\right]^2 = min.$$

Приравнивание нулю частных производных

$$\frac{dQ}{da} = \frac{dQ}{db} = \frac{dQ}{dc} = 0$$

дает возможность получить систему алгебраических уравнений, из которых можно определить a, b и c.

Функция *f(i)* отражает процесс совершенствования системы управления в процессе испытаний за счет целенаправленной деятельности коллектива экспериментаторов.

§ 3. Оценка результатов при независимых испытаниях (ГИ)

Поставим задачу. Пусть имеется случайная величина X, над которой произведено n независимых опытов (наблюдений) и в результате чего получены значения $X_1, X, \dots, X$, образующих совокупность значений случайной величины X. На основании этих данных требуется приближенно определить числовые характеристики величины X: математическое ожидание m и дисперсию D. Для нормального распределения эти характеристики определяют плотность вероятности, т.е.

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ell^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для решения этой задачи рассмотрим значение x_i как систему n независимых случайных величин

$$X_1, X_2, \dots, X_{i,} \dots, X_n \quad (i-1, \dots, n)$$

и определим для этой совокупности статистические характеристики:

среднее арифметическое

$$m^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

и статистическую дисперсию

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} [X_i - m^*]^2}{n}.$$

Обе эти характеристики представляют собой среднее арифметическое наблюдаемых значений некоторых случайных величин: X_i – в первом случае,

$(X_i - m^*)$ – во втором.

По закону больших чисел эти средние статистические сходятся (по вероятности) к математическим ожиданиям соответствующих величин: m^* сходится по вероятности к математическому ожиданию X - m.

$$m = M[X],$$

дисперсия $D^* \to D$.

$$D = M[(X - m^*)^2].$$

Однако, при малом числе наблюдений статистические характеристики m^* и D^* являются существенно случайными. При испытаниях в нашем распоряжении имеются лишь значения, случайно принятые этими величинами.

Поэтому реально возникает задача: на основании этих значений ориентировочно оценить неизвестные параметры m и D, т.е. найти для них некоторые значения, называемые оценками. Кроме того, возникает дополнительная задача: составить представление о точности и надежности этих оценок.

1. Выберем в качестве оценок статистической характеристики m^* и D^* . При увеличении n эти оценки должны стремиться к m и D. Однако, чтобы признать какую-либо случайную величину за оценку, необходимо убедиться в том, что среднее значение (математическое ожидание) этой оценки будет равно как раз искомому параметру. Оценка, обладающая таким свойством, называется несмещенной оценкой данного параметра.

Выясним – являются ли статистические характеристики m^* и D^* несмещенными оценками m и D.

1. Рассмотрим сначала среднее арифметическое, а именно

$$m^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Теперь возьмем математическое ожидание для m^*

$$m = M[m^*] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n} n\, m = m\,,$$

Следовательно, $M[m^*] = m$ и тогда m^* является несмещенной оценкой для m.

Дисперсия случайной величины m^* будет соответственно:

$$D_m = M[m^{*2}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} M[X_i^2] = \frac{1}{n^2}\, n\, D_m^* = \frac{1}{n}\; D_m^*\,.$$

Это говорит о том, что дисперсия m^* зависит от n и что с увеличением n дисперсия m^* уменьшается и что в пределе m^* как бы ведет себя не как случайная величина. Значит подходящее значение для m разумно брать среднее арифметическое наблюдаемых значений X:

$$m^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Рассмотрим статистическую дисперсию D^*. Выясним, является ли она несмещенной для D?

Найдем математическое ожидание для статистической дисперсии D^*

$$D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i - m^*]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

$$M[D^*] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i^2] - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} M[X_i^2] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}D - \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\,\cancel{n} = \mathrm{D} - \frac{1}{n}\,D = \frac{n-1}{n}\,D.$$

Поскольку математическое ожидание D^* не равно самой величине D, то D^* является смещенной оценкой, и она колеблется около $\frac{n-1}{n}\,D$.

Следовательно, статистическую дисперсию D^*, которую мы принимаем за оценку

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}[X_i - m^*]^2}{n}$$

необходимо домножить на величину $\frac{n}{n-1}$ и получить формулу для оценки статистической дисперсии

$$\widetilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[X_i - m^*]^2}{n} \cdot \frac{n}{n-1} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}[X_i - m^*]^2}{n-1}.$$

§ 4. Доверительные границы и доверительные вероятности

Доверительный интервал:

Рассмотрим среднее значение m. Нас интересует – с какой вероятностью α можно утверждать, что ошибка в оценке m не будет превышать величины ε:

$$\alpha = \mathrm{P}(m^* - m) < \varepsilon), \text{т. е.}$$

надо определить с какой вероятностью мы можем знать, что истинное неизвестное значение m будет заключаться в пределах $m^* - \varepsilon$ и $m^* + \varepsilon$. Величины $m^* - \varepsilon$ и $m^* + \varepsilon$ называются доверительными границами, а величина $m \pm \varepsilon$ – доверительный интервал.

Вероятность α называется доверительной вероятностью.

При этом доверительный интервал характеризует точность расчетов, а доверительная вероятность – его надежность.

Допустим, возникает задача: Каков должен быть доверительный интервал, чтобы можно было с вероятностью α утверждать, что m и σ не выйдут за границы этого интервала.

Будем считать, что X_i подчинена нормальному закону с неизвестными параметрами m и σ.

Рассмотрим только вопрос о доверительных границах m.

Для этого потребуется найти вероятность неравенства

$$p(|m^* - m| < \varepsilon),$$

которая обозначается α.

Если бы нам был известен закон распределения для m^* как случайной величины, то мы без труда определили бы α. Однако, этого закона мы не знаем.

Тогда для решения этой задачи используется следующий прием. Вместо m^*, которую мы вычислим, вводится другая случайная величина T, а именно

$$T = \frac{m^* - m}{S^*}, \text{где}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}[X_i - m^*]^2}{n(n-1)}}.$$

Эта случайная величина T подчиняется так называемому закону распределения Стьюдента:

$$S_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)n\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2},$$

где

$$\Gamma(\chi) = \int_{-\ell}^{\infty} t^{\chi-1}\,\dot{\xi}\;\ell^{-t}dt - \text{известная функция.}$$

Примечательно то, что $S_n(t)$ не зависит от m и σ случайной величины X, а является функцией числа наблюдений и аргумента t, т.е.

$$S_n = f(t, n).$$

Распределение S_n позволяет нам найти вероятность неравенства

$$\mathrm{P}(|m^* - m| < \varepsilon).$$

Как это сделать?

Зададимся произвольным положительным числом t_α и найдем вероятность попадания величины Т на участок $(-t_\alpha, t_\alpha)$. Это будет

$$\mathrm{P}(|\mathrm{T}| < t_\alpha) = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} S_n(t)dt = 2\int_{0}^{t_\alpha} S_n(t)dt.$$

Этой формулой можно воспользоваться для определения вероятности неравенства $|m^* - m| < \varepsilon$ для любого ε.

А именно:

Пусть задано ε, требуется найти

$$\alpha = \mathrm{P}(|m^* - m| < \varepsilon\,).$$

1. Вычислим величину

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}[X_i - m^*]^2}{n(n-1)}}.$$

2. Положим $t_\alpha = \frac{\varepsilon}{S^*}$.

3. Подставим в фоормулу для $\alpha = \mathrm{P}(|m^* - m| < \varepsilon)$ вместо $\varepsilon - t_\alpha S^*$, т.е. $\varepsilon = t_\alpha S^*$ и она примет вид

$$\alpha = \mathrm{P}(|m^* - m| < t_\alpha S^*)$$

и воспользовавшись соотношением вида

$$\mathrm{P}(|m^* - m| < t_\alpha S^*) = 2\int_0^{t_\alpha} S_n(t)dt$$

найдем

$$\boxed{\alpha = 2\int_0^{t_\alpha} S_n(t)dt}$$

Эта формула может быть табулирована для различных n и t_α .

Тогда, например, при заданной α и числе опытов n определяем значение t_α, а по формуле

$$\varepsilon = t_\alpha \cdot S^*$$

находим искомые доверительные границы и интервал $m^* \pm \varepsilon$.

Часто ставится и другая задача:

по заданному размеру $\pm\varepsilon$ доверительного интервала определить доверительную вероятность α. Для этого вычисляют S^*, находят

$$t_\alpha = \frac{\varepsilon}{S^*}$$

и по значениям в таблице находят соответствующее значение α.