

Глава IV Идентификация динамических характеристик по экспериментальным данным

Построение модели системы управления и ее элементов не всегда удается осуществлять аналитически, т.е. на основе использования законов физики. Это касается устройств, состоящих из множества объединенных информационным процессом компонентов различной физической природы. Поэтому развиваются методы идентификации, позволяющие построить модель по экспериментальным данным, полученным в результате исследования реакции системы на некоторое тестовое воздействие.

Рассмотрим эти методы.

§ 1. Идентификация линейных динамических систем.

1. С постоянными параметрами

а) Определение частотных характеристик.

Пусть на вход линейной динамической системы подается последовательно синусоидальный сигнал $x = a_x \sin \omega_i t$, ($i = 1, \dots, n$) с амплитудой a_x и частотой ω_i ($i = 1, \dots, n$). Требуется определить амплитудную и фазовую частотные характеристики. На выходе мы будем получать сигнал $y(t) = a_{y_i} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$, где a_{y_i} – амплитуда, а φ_i – сдвиг по фазе выходного сигнала.

Практически задача решается следующим образом: регистрируются осциллограммы входного и выходного сигналов на различных частотах, как это показано на рис. 33.

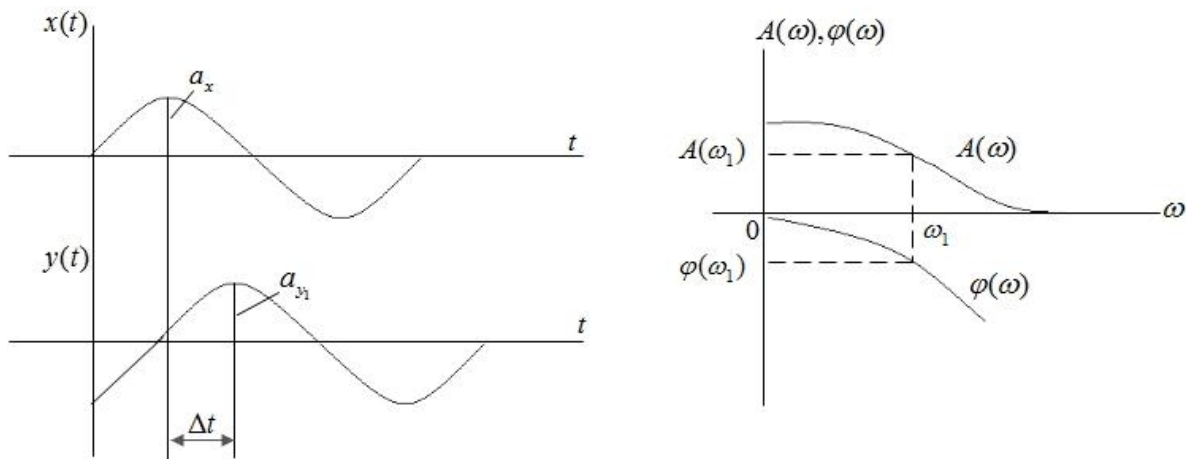


Рисунок 33 – Осциллограммы сигналов $x(t)$ и $y(t)$ на частоте ω и частотные характеристики

Для получения значения амплитудной частотной характеристики $A(\omega)$ необходимо взять отношение $A(\omega_i) = \frac{a_{y_i}}{a_x}$, значение фазовой характеристики будет $\varphi(\omega_i) = \Delta t \cdot \omega_i$. Например, $\Delta t = 0,1 \text{ с}$, $\omega_i = 5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varphi(\omega_i) = 0,5 \text{ рад} \approx 23 \text{ град}$ и т.д. для всех частот ω_i .

б) Определение импульсной переходной функции $k(t)$ ИПФ

В качестве тестового сигнала $x(t)$ берется $\sigma(t)$ функция, которая всюду равна нулю, кроме момента $\tau = 0$. Используем известное соотношение

$$y(t) = \int_0^t K(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_0^t K(\tau)\sigma(t - \tau)d\tau = K(t),$$

т.е. реакция на такой сигнал и есть И.П.Ф. Реально при идентификации можно использовать в качестве теста единичное воздействие $x(t) = 1(t)$, но тогда для получения И.П.Ф. надо продифференцировать сигнал $y(t)$, $K(t) \equiv y'(t)$.

§ 2. Идентификация линейных динамических систем с переменными во времени параметрами.

При идентификации линейных динамических систем с переменными во времени параметрами (Л.П.С.) применяется так называемый метод

синхронного детектирования. В качестве тестового сигнала берется сумма нескольких синусоидальных сигналов различной частоты $x(t) = \sum_{i=0}^n A_i \sin \omega_i t$.

Выходной сигнал в этом случае будет

$$y(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) \sin[\omega_i t + \varphi_i(t)].$$

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 34:

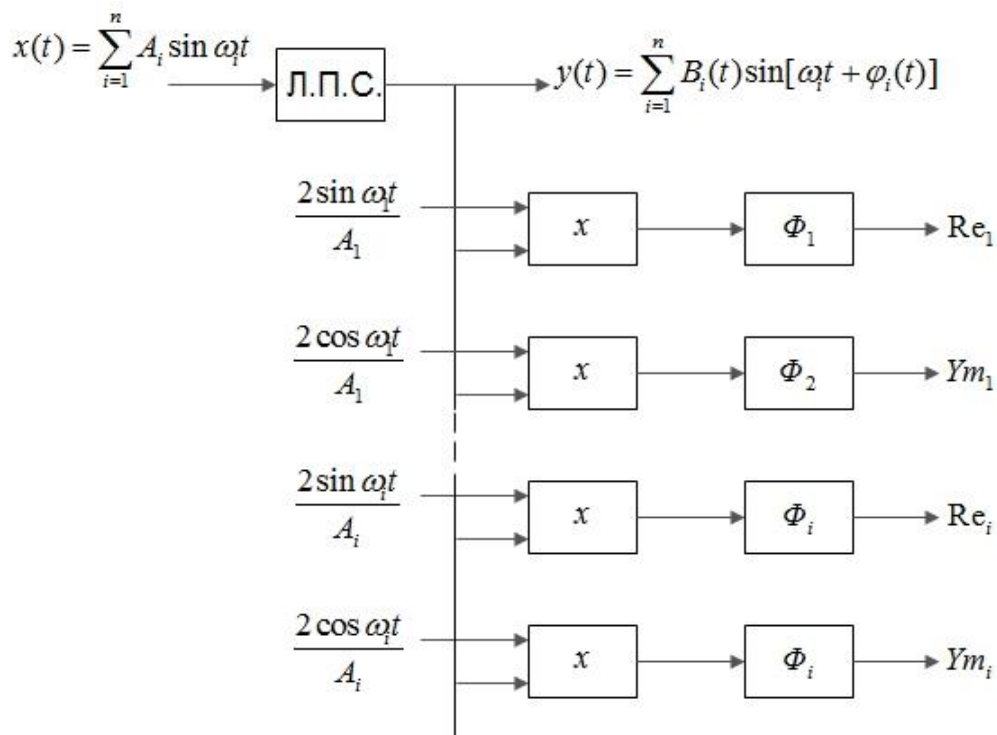


Рисунок 34 – Схема синхронного детектирования

На этом рисунке знак \times - перемножение, а Φ_1, \dots, Φ_i - фильтры высоких частот.

В соответствии со схемой образуем следующее произведение:

$$\begin{aligned} y(t) \cdot \frac{2 \sin \omega_1 t}{A_1} &= \sum_{i=1}^n B_i(t) \sin[\omega_i t + \varphi_i(t)] \cdot \frac{2 \sin \omega_1 t}{A_1} = \\ &= \frac{B_1(t)}{A_1} 2 \sin \omega_1 t \sin[\omega_1 t + \varphi_1(t)] + \frac{2 \sin \omega_1 t}{A_1} \sum_{i=2}^n B_i(t) \sin[\omega_i t + \varphi_i(t)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{B_1(t)}{A_1} \cos \varphi_1(t) - \frac{B_1(t)}{A_1} \cos[2\omega_i t + \varphi_i(t)] + \sum_{i=2}^n \dots = \\
&\cong \frac{B_1(t)}{A_1} \cos \varphi_1(t) = R_e W(j\omega_1).
\end{aligned}$$

В этом выражении отбрасываются все члены, кроме первого, т.к. с помощью фильтра Φ_1 отфильтровываются все гармоники двойной и других более высоких частот, а оставшийся член представляет вещественную часть комплексной частотной характеристики $W(j\omega_1)$ на частоте ω_1 .

Аналогично рассмотрим следующее произведение:

$$y(t) \cdot \frac{2 \cos \omega_1 t}{A_1} \cong \frac{B_1(t)}{A_1} \sin \varphi_1(t) = J_m W(j\omega_1)$$

И так далее для всех интересующих нас частот. Таким образом, с помощью такой схемы можно измерить вещественную и мнимую компоненты вектор-функции $W(j\omega_1)$ и построить комплексную частотную характеристику для текущего времени, так как это показано на рис. 35.

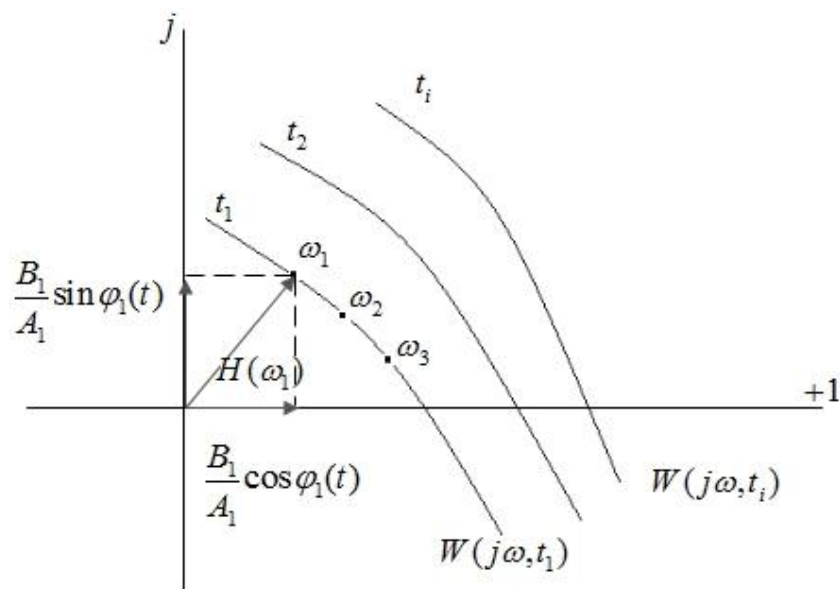


Рисунок 35 – Функция $W(j\omega_1 t)$

Таким образом, можно получить частотную характеристику Л.П.С. в следующем виде:

$$W(j\omega_1 t) = H(\omega_i)[\cos\varphi_i(t) + j\sin\varphi_i(t)], \quad H(\omega_i) = \frac{B_1(t)}{A_1(t)}.$$

§ 3. Идентификация дискретных систем.

Рассмотрим дискретную систему (Д.С.)

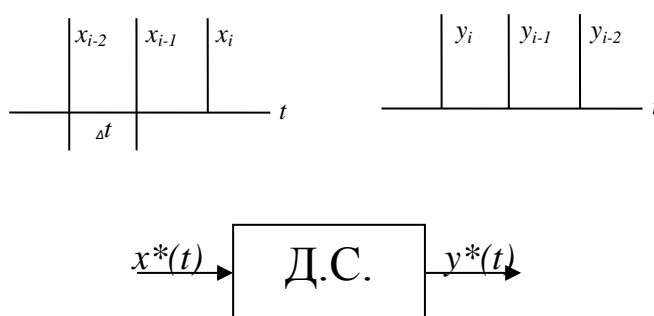


Рисунок 36 – Схема дискретной системы

Каким образом по вход-выходным данным определить динамические свойства Д.С.?

I В общем случае Д.С. можно описать в виде:

$$Y_i = \theta(X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_{i-N-1}; Y_{i-1}, \dots, Y_{i-N-1}; \Delta t),$$

где: θ – некоторая нелинейная функция;

x – входной процесс, y – выходной процесс.

Для простоты представим, что это уравнение является линейным, а его коэффициенты не зависят от времени.

$$Y_i = A_0 X_{i-1} + \dots + A_N X_{i-N-1} + B_0 Y_{i-1} + \dots + B_{N-N-1}$$

Это уравнение $N+1$ порядка с $N+1$ выборкой предыдущих значений.

II Представим входной и выходной процессы графически:

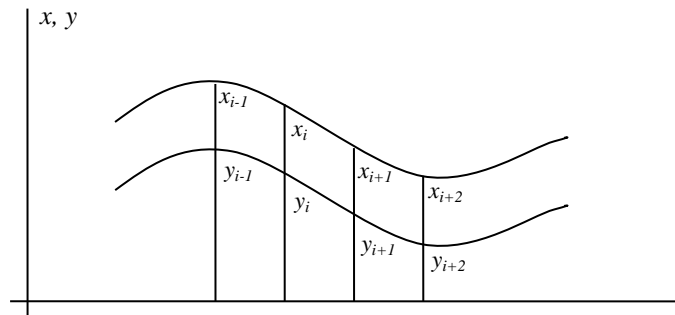


Рисунок 37 – График входных и выходных сигналов

По этим графикам составим следующую таблицу выборки:

Таблица 1

t	X	Y
⋮	⋮	⋮
$t=t_0 - 2\Delta t$	X_{i-2}	Y_{i-2}
$t=t_0 - \Delta t$	X_{i-1}	Y_{i-1}
$t=t_0$	X_i	Y_i
$t=t_0 + \Delta t$	X_{i+1}	Y_{i+1}
$t=t_0 + 2\Delta t$	X_{i+2}	Y_{i+2}
⋮	⋮	⋮

Эти данные можно сгруппировать, но построить оценки \hat{y}_i для выходных значений:

Таблица 2

X, Y	\hat{Y}
⋮	⋮
$Y_{i-1}, Y_{i-2}, \dots, Y_{i-N-2}$ $X_{i-2}, X_{i-3}, \dots, X_{i-N-2}$	$\hat{Y}_{i-1} = A_0 X_{i-2} + \dots + A_N X_{i-N-2} + B_0 Y_{i-2} + \dots + B_N Y_{i-N-2}$
$Y_i, Y_{i-1}, \dots, Y_{i-N-1}$ $X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_{i-N-1}$	$\hat{Y}_i = A_0 X_{i-1} + \dots + A_N X_{i-N-1} + B_0 Y_{i-1} + \dots + B_N Y_{i-N-1}$
$Y_{i+1}, Y_i, \dots, Y_{i-N}$ $X_i, X_{i-1}, \dots, X_{i-N}$	$\hat{Y}_{i+1} = A_0 X_i + \dots + A_N X_{i-N} + B_0 Y_i + \dots + B_N Y_{i-N}$
⋮	⋮

III Сформируем функционал

$$\alpha = \sum_{i=1}^M (Y_i - \hat{Y}_i)^2,$$

где: M – число вычислительных переменных состояния.

$$\alpha = \sum_{i=1}^M [Y_i - (\hat{Y}_i = A_0 X_{i-1} + \dots + A_N X_{i-N-1} + B_0 Y_{i-1} + \dots + B_N Y_{i-N-1})]^2$$

Возьмем частные производные по $A_0, \dots, A_i, B_0, \dots, B_i$.

$$\frac{\partial L}{\partial A_0} = \frac{\partial L}{\partial A_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial A_N} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_0} = \frac{\partial L}{\partial B_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial B_N} = 0$$

Получим $(2N+2)$ линейных алгебраических уравнений, содержащих $A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots, B_N$.

Из решения полученной системы уравнений определим искомые коэффициенты.

IV Рассмотрим пример:

Возьмем следующую зависимость

$$\hat{Y}_i = A_0 X_{i-1} + B_0 Y_{i-1}$$

$$L = \sum_{i=1}^M [Y_i - (A_0 X_{i-1} + B_0 Y_{i-1})]^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_0} = -2 \sum_{i=1}^M [Y_i - (A_0 X_{i-1} + B_0 Y_{i-1})] X_{i-1} = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_0} = -2 \sum_{i=1}^M [Y_i - (A_0 X_{i-1} + B_0 Y_{i-1})] Y_{i-1} = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^M Y_i X_{i-1} - A_0 \sum_{i=1}^M X_{i-1}^2 - B_0 \sum_{i=1}^M Y_{i-1} X_{i-1} = 0$$

$$\sum_{i=1}^M Y_i Y_{i-1} - A_0 \sum_{i=1}^M X_{i-1} Y_{i-1} - B_0 \sum_{i=1}^M Y_{i-1}^2 = 0$$

$$\left\| \begin{array}{cc} \sum_{i=1}^M X_{i-1}^2 & \sum_{i=1}^M Y_{i-1} X_{i-1} \\ \sum_{i=1}^M X_{i-1} Y_{i-1} & \sum_{i=1}^M Y_{i-1}^2 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_0 \\ B_0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^M Y_i X_{i-1} \\ \sum_{i=1}^M Y_i Y_{i-1} \end{array} \right\|$$

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^M Y_i X_{i-1} \sum_{i=1}^M Y_{i-1}^2 - \sum_{i=1}^M Y_{i-1} X_{i-1} \sum_{i=1}^M Y_i Y_{i-1}}{\sum_{i=1}^M X_{i-1}^2 \sum_{i=1}^M Y_{i-1}^2 - (\sum_{i=1}^M Y_{i-1} X_{i-1})^2};$$

$$B_0 = \frac{\sum_{i=1}^M Y_i X_{i-1} \sum_{i=1}^M Y_i Y_{i-1} - \sum_{i=1}^M Y_{i-1} X_{i-1} \sum_{i=1}^M Y_i X_{i-1}}{\sum_{i=1}^M X_{i-1}^2 \sum_{i=1}^M Y_{i-1}^2 - (\sum_{i=1}^M Y_{i-1} X_{i-1})^2}$$

Для оценки точности:

Стандартное отклонение (СКО)

$$S = \sigma = \left[\frac{\sum_{i=1}^M \rho_i^2}{M-2} \right]^{1/2} = \left[\frac{\sum_{i=1}^M (Y_i - \hat{Y})^2}{M-2} \right]^{1/2}.$$

Преимущество метода идентификации:

1. Не нарушается нормальный процесс эксплуатации. Не требуется тестовый сигнал.
2. Не требуется специального оборудования.
3. Необходимы только экспериментальные данные, полученные через равные промежутки времени Δt .
4. Регистрация и вычисления проводятся на той же управляющей ЭВМ.

Можно также от дискретного уравнения перейти к непрерывному.

Пусть

$$\hat{Y}_i = A_0 X_{i-1} + B_0 Y_{i-1}$$

$$Y^*(S) = A_0 \ell^{-S\Delta t} X^*(S) + B_0 \ell^{-S\Delta t} Y^*(S),$$

$$\frac{Y^*(S)}{X^*(S)} = \frac{A_0 e^{-S\Delta t}}{1 - B_0 e^{-S\Delta t}}$$

Применим разложение Паде:

$$e^{-S\Delta t} \cong \frac{1 - \frac{S\Delta t}{2}}{1 + \frac{S\Delta t}{2}},$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{Y^*(S)}{X^*(S)} &= \frac{A_0 \frac{1 - \frac{S\Delta t}{2}}{1 + \frac{S\Delta t}{2}}}{1 - B_0 \frac{1 - \frac{S\Delta t}{2}}{1 + \frac{S\Delta t}{2}}} = \\ &= \frac{\frac{A_0}{1 - B_0} \left(1 - \frac{S\Delta t}{2}\right)}{1 + \frac{\Delta t}{1 - B_0} S}. \end{aligned}$$

§ 4. Идентификация нелинейных динамических систем.

Имеется нелинейная система

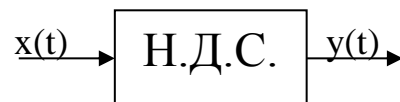


Рисунок 38 – Схема нелинейной системы

Поставим задачу: требуется идентифицировать модель этой системы, а именно, найти оценку $\hat{F}(x)$ для нелинейной системы $F(x)$ по вход-выходным данным (см. рис. 38). Критерием близости оценки к оригиналу будет норма разности дисперсий

$$\|D_y - D_{\hat{y}}\| \leq \overline{\varepsilon^2}(t)$$

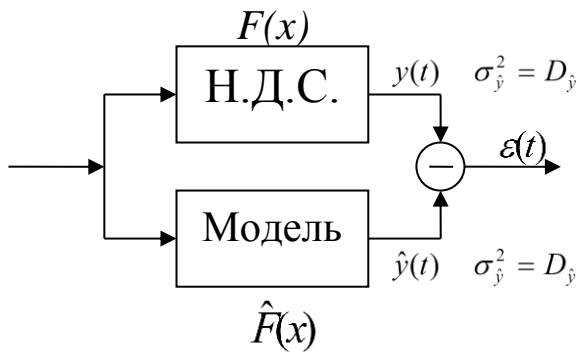


Рисунок 39 – Схема постановки задачи

Будем искать модель $\hat{F}(x)$ в виде:

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=0}^{\rho} G_n[h_n, x(t)], \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty$$

получим

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n[h_n, x(t)],$$

где $x(t)$ - белый гауссов процесс с корреляционной функцией

$$R_x(\tau) = c^2 \delta(\tau) \text{ и спектральной плотностью } S_x(\omega) = \frac{c^2}{2\pi};$$

G_n – ортогональные полиномы Винера, такие, что при

$$m \neq n \quad \overline{G_n \times G_m} = 0.$$

Можно записать

$$\begin{aligned} & \overline{G_n \times G_m} = \\ & 0 \text{ при } m \neq n \\ = & \begin{cases} n! \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{r=1}^n R_x(\tau_n - \tau_r) d\tau_1, \dots, d\tau_n \end{cases} \end{aligned}$$

при $m=n$.

Сами полиномы можно выписать следующим образом:

$$G_0 = \bar{y}(t) = h_0$$

$$G_1 = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)x(t - \tau)d\tau;$$

$$G_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_1, \tau_2)x(t - \tau_1)s(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 -$$

$$-c^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)d\tau_2;$$

$$G_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)x(t - \tau_3)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 -$$

$$-3c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2)x(t - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \quad \text{и т.д.}$$

Соответственно, для

$$\hat{y}(t) = h_0 + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1)x(t - \tau_1)d\tau_1$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 -$$

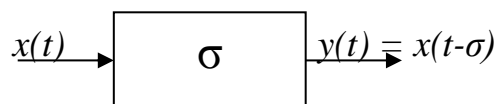
$$-c^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)d\tau_2 + \dots,$$

Но надо знать h_n – ядра G -функционалов.

Поэтому рассмотрим каким образом можно определять ядра h_n .

Предварительно рассмотрим цепи с запаздыванием.

Обратимся к схеме, показанной на рис. 40.



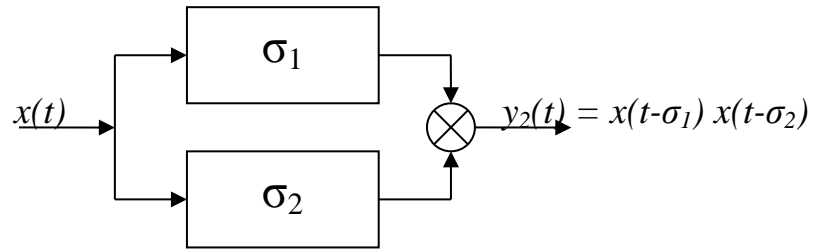


Рисунок 40 – Схема цепей с запаздыванием

1. $y(t) = x(t - \sigma)$, σ – запаздывание.

Или

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \sigma)x(t - \tau)d\tau = x(t - \sigma).$$

2. $y(t) = x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)$

Или

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_1 - \sigma_1)\delta(\tau_2 - \sigma_2) \times \\ \times x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 = x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)$$

и т. д.

Теперь перейдем к выводу формул, по которым можно определить ядра h_n (рис. 41).

1. Определим h_1 - ядро первого порядка

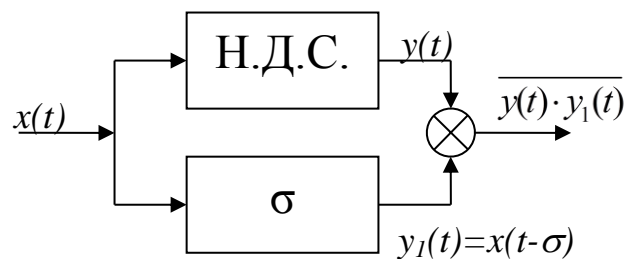


Рисунок 41 – Схема для определения ядра h_1

$$\begin{aligned}
\overline{y(t)y_1(t)} &= \overline{\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} G_n[h_n, x(t)] \right\} x(t - \sigma)} = \\
&= \overline{h_0 x(t - \sigma)} + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau \cdot x(t - \sigma) = \\
&= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) \overline{x(t - \tau)x(t - \sigma)} d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) c^2 \delta(\sigma - \tau) d\tau = c^2 h_1(\sigma).
\end{aligned}$$

$$h_1(\sigma) = \frac{1}{c^2 y(t) x(t - \tau)}$$

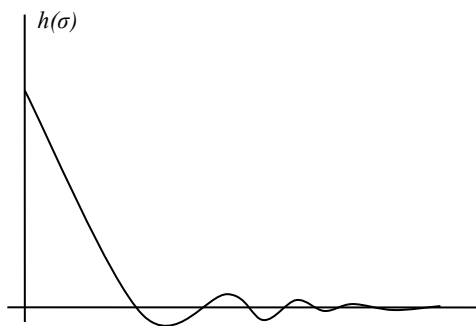


Рисунок 42 – График ядра h_1

2. Определим h_2 – ядро второго порядка.

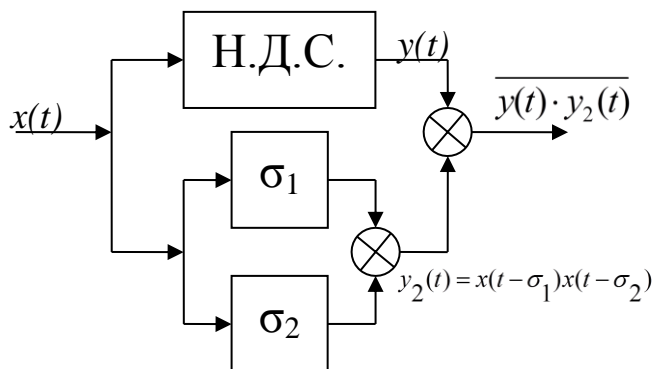


Рисунок 43 – Схема для определения ядра h_2

$$\begin{aligned}
\overline{y(t)y_1(t)} &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} G_n[h_n, x(t)] \right\} x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2) = \\
&= \overline{h_0 x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)} + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)x(t - \tau)d\tau \times x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2) + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \times x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2) - \\
&\quad - \left\{ c^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \right\} x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2) = \\
&= c^2 h_0 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) \overline{x(t - \tau)x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)} d\tau + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)} d\tau_1 d\tau_2 - \\
&\quad - c^4 \sigma(\sigma_2 - \sigma_1) \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_2, \tau_2) d\tau_2 = c^2 h_0 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) [c^2 \delta(\tau_2 - \tau_1) c^2 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) + \\
&\quad + c^2 \delta(\sigma_1 - \tau_1) c^2 \delta(\sigma_2 - \tau_2) + c^2 \delta(\sigma_2 - \tau_1) c^2 \delta(\sigma_1 - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 - \\
&\quad - c^4 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_2, \tau_2) d\tau_2 = c^2 h_0 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) + \\
&\quad + c^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \delta(\tau_2 - \tau_1) \delta(\sigma_2 - \sigma_1) d\tau_1 d\tau_2 + \\
&\quad + c^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \delta(\sigma_2 - \tau_1) \delta(\sigma_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1, \tau_2) \delta(\sigma_2 - \tau_1) \delta(\sigma_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \\
& -c^4 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_2, \tau_2) d\tau_2 = \\
& = c^2 h_0 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) + c^4 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_2, \tau_2) d\tau_2 + \\
& +c^4 h_2(\sigma_1, \sigma_2) + c^4 h_2(\sigma_2, \sigma_1) - c^4 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_2, \tau_2) d\tau_2 = \\
& = c^2 h_0 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) + 2c^4 h_2(\sigma_2, \sigma_1). \\
& y(t)y_2(t) = c^2 h_0 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) + 2c^4 h_2(\sigma_2, \sigma_1). \\
& \text{при } \sigma_1 \neq \sigma_2; \quad c^0 h_0 \delta(\sigma_2 - \sigma_1) = 0.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
h_2(\sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{2c^4} y(t)y_2(t) = \\
&= \frac{1}{2c^4} \cdot \overline{y(t)x(t - \sigma_1)x(t - \sigma_2)}
\end{aligned}$$

и т.д.

Общие формулы для определения ядер h_n – следующие:

$$h_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n! c^{2n}} \cdot \overline{y(t)x(t - \sigma_1) \dots (t - \sigma_n)}$$

при $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \dots \sigma_n$.

Для любых σ

$$h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n! c^{2n}} \left\{ y(t) - \sum_{m=0}^{n-1} G_m[h_m x(t)] \right\} x(t - \sigma_1) \dots x(t - \sigma_n)$$

Таким образом, в данной главе приведены основные методы непараметрической идентификации систем управления.

Материал предшествующих глав был по-сути дела прелюдией для рассмотрения основных проблем моделирования и испытаний систем управления.